MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

$\nu \in \mathcal{T}\ell\iota \int \phi \mathbb{I} \mathcal{T}_\mu$

Analyysi I, vko45 syksy 2013

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

Tehtävä. ***O1*** *Selvitä kurssin lauseiden avulla*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x+1}{x^2-1}.$$

Toteamme, että

$$\lim_{x\to 3} x = 3 \text{ ja } \lim_{x\to 3} 1 = 1.$$

Käytämme lausetta 3.1.10 moneen kertaan. Kyseisen lauseen perusteella:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3} x = 3 \\ \Rightarrow &\lim_{x\to 3} x^2 = \lim_{x\to 3} x \cdot x = 3 \cdot 3 = 9; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3} x^2 = 9, \quad \lim_{x\to 3} x = 3 \text{ ja } \lim_{x\to 3} 1 = 1 \\ \Rightarrow &\lim_{x\to 3}(x^2+x+1) = 9+3+1 = 13. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 3} x^2 = 9 \text{ ja } \lim_{x\to 3} 1 = 1 \\ \Rightarrow &\lim_{x\to 3}(x^2-1) = 9-1 = 8; \end{aligned}$$

Koska nimittäjän raja-arvo pisteessä 3 on erisuuri kuin nolla, niin

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x+1}{x^2-1} = \frac{13}{8}.$$

Tehtävä. ***O2*** *Osoita määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-7} = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to 7+} \frac{x^2+1}{x-7} = \infty.$$

Tutkitaan ensin raja-arvoa siellä jossakin kaukana reaalisuoran oikeassa päässä. Oletetaan, että $x > 7$. Tällöin

$$\frac{x^2+1}{x-7} > \frac{x^2-49}{x-7} = x + 7 > x.$$

Olemme siis huomanneet jonkin mukavan ja tilannetta yksinkertaistavan yksityiskohdan. Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan $K = \max\{7, M\}$. Otimme maksimin nimenomaan luvuista 7 ja M, jotta yllä oleva arvio pätee. Tällöin kun $x > K$, niin $x > 7$ ja $x > M$ ja edelleen

$$\frac{x^2+1}{x-7} > x > M.$$

Olemme löytäneet mielivaltaiselle reaaliluvulle M kynnyksen K, jolle pätee

$$\frac{x^2+1}{x-7} > M, \text{ kun } x > K. \quad \square$$

Tutkitaan nyt oikeanpuoleista raja-arvoa pisteessä 7, olkoon siis $x > 7$. Tällöin

$$\frac{x^2+1}{x-7} > \frac{1}{x-7}.$$

Jos $M > 0$, niin haluamme, että

$$\frac{1}{x-7} > M \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{M} > (x-7)$$

Tässä tapauksessa valitsisimme $\delta < 1/M$.

Ratkaisu:

Olkoon $M \in \mathbb{R}$, $x > 7$. Valitaan $M_1 = \max\{1, M\}$. Lausekkeen $1/(x-7) > M_1$

kanssa yhtäpitävä lauseke on $1/M_1 > (x-7)$. Valitsimme positiivisen M_1 sen takia, jotta edellisessä virkkeessä tehty lausekkeiden pyöritys ei vaihtaisi epäyhtälön suuntaa. Nyt valitsemme $\delta > 0$, siten että $\delta < 1/M_1$. Tällöin kun $7 < x < 7 + \delta$

$$\frac{x^2+1}{x-7} > \frac{1}{x-7} > \frac{1}{\delta} > M_1 \geq M. \quad \square$$

Tehtävä. ***K1*** *Selvitä kurssin lauseiden avulla*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2+1}.$$

Toteamme, että

$$\lim_{x\to 1} x = 1 \text{ ja } \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

Käytämme lausetta 3.1.10 moneen kertaan. Kyseisen lauseen perusteella:

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 1} x = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x\to 1} x^2 = \lim_{x\to 1} x \cdot x = 1 \cdot 1 = 1;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 1} x^2 = 1, \quad \lim_{x\to 1} x = 1 \text{ ja } \lim_{x\to 1} 1 = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 1+1+1 = 3.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\lim_{x\to 1} x^2 = 1 \text{ ja } \lim_{x\to 1} 1 = 1 \\ \Rightarrow \lim_{x\to 1}(x^2+1) = 1+1 = 2;\end{gathered}$$

Koska nimittäjän raja-arvo pisteessä 1 on erisuuri kuin nolla, niin

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2+1} = \frac{3}{2}.$$

Tehtävä. ***K2*** *Osoita määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+7}=\frac{1}{4}.$$

Tapa 1 (raja-arvon määritelmä)
Lähdemme tutkimaan tehtävänannon lauseketta:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x^2+1}{x+7}-\frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{4x^2+4}{4(x+7)}-\frac{x+7}{4(x+7)}\right| \\
&= \left|\frac{4x^2-x-3}{4(x+7)}\right| =^{\mathbf{1*}} \frac{|(x^2-x)+(3x^2-3)|}{4(x+7)} \\
&= \frac{|x(x-1)+3(x^2-1)|}{4(x+7)} = \frac{|x(x-1)+3(x+1)(x-1)|}{4(x+7)} \\
&= \frac{|(4x+3)(x-1)|}{4(x+7)} = \frac{(4x+3)\,|(x-1)|}{4(x+7)} \\
&\leq (4x+3)\,|(x-1)| <^{\mathbf{2*}} 11\,|(x-1)|\,.
\end{aligned}$$

1*: Olemme kiinnostuneet ykkösen välittömästä ympäristöstä, joten voimme huoletta olettaa esim $x > 0$.
2*: Olemme edelleen kiinnostuneet ykkösen välittömästä ympäristöstä, joten voimme huoletta olettaa $x < 2$.
Haluamme, että $11\,|(x-1)| < \varepsilon$ mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $|(x-1)| < \varepsilon/11$. Arvioita auttavien välioletusten **1*** ja **2*** perusteella haluaisimme, että $\delta \leq 1$ ja edellisen virkkeen perusteella haluaisimme, että $\delta \leq \varepsilon/11$.
Ratkaisu:
Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\varepsilon/11, 1\}$. Tällöin kun $1-\delta < x < 1+\delta$

$$\left|\frac{x^2+1}{x+7}-\frac{1}{4}\right| < 11\,|(x-1)| < 11\cdot\delta \leq 11\cdot\frac{\varepsilon}{11} = \varepsilon. \quad \square$$

Tapa 2 (toispuoleisen raja-arvon määritelmä ja lause 3.2.3.)

Koska tehtävänannossa pyydetään ratkaisua raja-arvon määritelmän avulla,

tämä ratkaisu EI KELPAA TENTISSÄ. Tästä saa kuitenkin irti harjoituksen toispuoleisille raja-arvoille ja lauseen 3.2.3 soveltamisesta

Lähdemme tutkimaan tehtävänannon lauseketta:

$$\left|\frac{x^2+1}{x+7} - \frac{1}{4}\right| = \left|\frac{4x^2+4}{4(x+7)} - \frac{x+7}{4(x+7)}\right| = \left|\frac{4x^2-x-3}{4(x+7)}\right| = \frac{|4x^2-x-3|}{4(x+7)}.$$

Viimeisessä yhtäsuuruudessa täytyy olettaa nimittäjän positiivisuus. Jokatapauksessa meillä on osoittajan kanssa ongelma, koska se saa pisteen 1 ympäristössä sekä negatiivisia, että positiivisia arvoja. Tässä tilanteessa meitä auttaa luentomonisteen lause 3.2.3, joten siirrymme tarkastelemaan toispuoleisia raja-arvoja. Eli osoitamme molemmat seuraavista väitteistä

$$\textbf{väite 1.}\ \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1}{x+7} = \frac{1}{4},$$

$$\textbf{väite 2.}\ \lim_{x\to 1-} \frac{x^2+1}{x+7} = \frac{1}{4}.$$

Olkoon $x > 1$. Tästä seuraa, että $x^2 > x > 1$. Eli $4x^2 - x - 3 > 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\frac{|4x^2-x-3|}{4(x+7)} &= \frac{4x^2-x-3}{4(x+7)} \\
< 4x^2 - x - 3 &= x^2 - x + 3x^2 - 3 \\
&= x^2 - x + 3(x^2-1) \\
&= x(x-1) + 3(x+1)(x-1) \\
&= (x+3x+3)(x-1) \\
&= (4x+3)(x-1)
\end{aligned}$$

Haluamme eroon lausekkeen turhista muuttujista, joten teemme rajoituksen $1 < x < 2$. Tällöin $(4x+3)(x-1) < 11(x-1)$. Haluamme että $11(x-1) < \varepsilon$, mikä on yhtäpitävää sen kanssa, että $x-1 < \varepsilon/11$. Nyt valinnalla $\delta = \min\{1, \varepsilon/11\}$, saisimme väitteen osoitettua. Valinnassa ykkönen oli mukana, jotta aikaisempi arvio $(4x+3)(x-1) < 11(x-1)$ pätisi varmasti.

Ratkaisu väitteelle 1.:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon/11\}$. Kun $1 < x < 1 + \delta$, niin

$$\left|\frac{x^2+1}{x+7} - \frac{1}{4}\right| = \frac{4x^2 - x - 3}{4(x+7)} < 11(x-1) < 11\delta \leq 11 \cdot \frac{\varepsilon}{11} = \varepsilon.$$

Olemme siis osoittaneet väitteen

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2+1}{x+7} = \frac{1}{4}.$$

Olkoon $0 < x < 1$. Tällöin $x^2 < x < 1$, mistä edelleen seuraa $4x^2 - x - 3 < 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\frac{|4x^2 - x - 3|}{4(x+7)} &= \frac{-4x^2 + x + 3}{4(x+7)} \\
< 3 + x - 4x^2 &= 3 - 3x^2 + x - x^2 \\
&= 3(1 - x^2) + x(1 - x) \\
&= 3(1 + x)(1 - x) + x(1 - x) \\
&= (3 + 3x + x)(1 - x) \\
&= (3 + 4x)(1 - x) < 7(1 - x).
\end{aligned}$$

Tässä haluamme, että $7(1 - x) < \varepsilon$, joten meidän valinnalle täytyisi päteä $\delta \leq \varepsilon/7$.

Ratkaisu väitteelle 2.:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon/7\}$. Kun $1 - \delta < x < 1$, niin

$$\left|\frac{x^2+1}{x+7} - \frac{1}{4}\right| = \frac{-4x^2 + x + 3}{4(x+7)} < 7(1-x) < 7\delta \leq 7\frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon.$$

Olemme siis osoittaneet väitteen

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2+1}{x+7} = \frac{1}{4}.$$

Olemme osoittaneet väitteet 1 ja 2, joten lauseen 3.2.3. nojalla olemme valmiit. $\square$

Tehtävä. ***K3*** *Osoita määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \infty.$$

Oletetaan, että $x > 0$, tällöin

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} > \frac{x^2+x}{x+1} = \frac{x(x+1)}{x+1} = x.$$

Ratkaisu:

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan $K = \max\{0, M\}$. Olkoon $x > K$. Koska $K \geq 0$, niin $x > 0$. Tällöin

$$\frac{x^2+x+1}{x+1} > x > K \geq M. \quad \square$$