Vitali Soitu

Analyysi I, vko39 syksy 2013

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

Tehtävä. ***O3*** *(a) Todista seuraava (monisteen) tulos. Jos jono* (x_n) *suppenee, niin kaikilla* $\epsilon > 0$ *on olemassa sellainen* K*, että kaikilla* $n > K$ *ja* $m > K$ *pätee* $|x_n - x_m| < \epsilon$.

(b) Osoita (a)- kohdan tuloksen avulla, että jono $(-1)^n$ *hajaantuu.*

(a) Olkoon (x_n) suppeneva jono ja $\varepsilon > 0$. Olkoon lisäksi $a \in \mathbb{R}$ sellainen, että

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Tällöin määritelmän 1.2.2. mukaan on olemassa sellainen $n_{\varepsilon/2} \in \mathbb{N}$, että

$$\mid x_n - a \mid < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun } n > n_{\varepsilon/2}.$$

Valitaan $m, k > n_{\varepsilon/2}$. Nyt tiedämme, että $\mid x_m - a \mid < \varepsilon/2$ ja $\mid x_k - a \mid < \varepsilon/2$. Tällöin muokkaamalla lauseketta ja kolmioepäyhtälöllä saamme, että

$$\mid x_m - x_k \mid = \mid x_m - a + a - x_k \mid \leq \mid x_m - a \mid + \mid a - x_k \mid < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \quad \square$$

(b) Todistetaan vastaväitteellä, että jono $((-1)^n)$ hajaantuu. Oletetaan, että

$((-1)^n)$ suppenee. Olkoon $\varepsilon = 1/2$. Nyt voimme a-kohdan perusteella valita sellaisen $K \in \mathbb{N}$, että

$$\mid (-1)^n - (-1)^m \mid < 1/2, \quad \text{kun } n, m > K.$$

Oletetaan, että $m > K$, tällöin

$$\mid (-1)^m - (-1)^{m+1} \mid = \mid (-1)^m (1 - (-1)) \mid = \mid (-1)^m \mid 2 = 2.$$

Mutta oletimme näiden kahden jonon jäsenen välisen etäisyyden olevan korkeintaan 1/2. Päädyimme ristiriitaan, joten väite on tosi. $\square$

Tehtävä. ***O4*** *Onko mahdollista, että jonot (x_n) ja (y_n) hajaantuvat, mutta jono $(x_n y_n)$ suppenee? Todista tuloksesi!*

Tehtävässä **O3** todistettiin, että jono $((-1)^n)$ hajaantuu. Vastaavasti voimme osoittaa, että myös jono $((-1)^{n+1})$ hajaantuu. Tutkitaan jonoa $((-1)^n(-1)^{n+1})$. Nyt kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$. Joten tämä jono suppenee ja sen raja-arvo on -1.

Tehtävä. ***K4*** *Osoita, että väite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} = 0$$

on tosi.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Aloitamme tutkimalla lukua $\frac{2n+1}{n^2+2}$:

$$\frac{2n+1}{n^2+2} \le \frac{2n+1}{n^2} \le \frac{2n+n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Valitaan kokonaisluku $n_\varepsilon > 3/\varepsilon$. Olkoon $n > n_\varepsilon$, tällöin

$$\left|\frac{2n+1}{n^2+2} - 0\right| = \frac{2n+1}{n^2+2} \le \frac{3}{n} < \frac{3}{n_\varepsilon} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Olemme siis löytäneet mielivaltaiselle ε:lle kynnysindeksin n_ε, jolle

$$\left|\frac{2n+1}{n^2+2} - 0\right| < \varepsilon, \quad \text{kun } n > n_\varepsilon. \quad \square$$

Tehtävä. ***K5*** *Osoita, että väite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} = 1$$

on epätosi

Arvioidaan ensin lauseketta
$$\left|\frac{2n+1}{n^2+2}-1\right|.$$
Koska haluamme osoittaa raja-arvon epätodeksi, arvioimme alaspäin:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2n+1}{n^2+2}-1\right| = \left|\frac{2n+1}{n^2+2}-\frac{n^2+2}{n^2+2}\right| = \left|\frac{-n^2+2n-1}{n^2+2}\right| \\
&= \left|\frac{-(n-1)^2}{n^2+2}\right| = \frac{(n-1)^2}{n^2+2} \geq \frac{(n-1)^2}{n^2+2n^2} = \frac{n^2-2n+1}{3n^2} \\
&= \frac{1}{3}-\frac{2}{3n}+\frac{1}{3n^2} \geq \frac{1}{3}-\frac{2}{3n}
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon = 1/10$ ja $n > 3$. Jotta emme tekisi arviossa nyt virhettä, on hyvä tarkistaa ensin pieni yksityiskohta: $n > 3 \Leftrightarrow$
$1/n < 1/3 \Leftrightarrow 2/3n < 2/9 \Leftrightarrow -2/3n > -2/9$. Tällöin

$$\left|\frac{2n+1}{n^2+2}-1\right| \geq \frac{1}{3}-\frac{2}{3n} > \frac{1}{3}-\frac{2}{9} = \frac{1}{9} > \frac{1}{10} = \varepsilon.$$

Tästä erityisesti seuraa, ettei ole olemassa kynnysindeksiä $K \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\left|\frac{2n+1}{n^2+2}-1\right| < \frac{1}{10},$$

kaikilla $n > K$. Eli väite on epätosi.

Tehtävä. ***K6*** *(a) Oletetaan, että* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *ja että kaikilla* n *pätee* $|y_n| \leq 7$. *Osoita, että* $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

(b) Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$ ja että kaikilla n pätee $|y_n| \leq 7$. Seuraako tästä, että jono $(x_n y_n)$ suppenee?

(a) Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ja että kaikilla n pätee $|y_n| \leq 7$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska jono (x_n) suppenee, niin on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}$, että
$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon/7$ kaikilla $n > K$. Tällöin kun $n > K$:

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| \leq |x_n|7 < \frac{\varepsilon}{7}\cdot 7 = \varepsilon.$$

Olemme löytäneet kynnysindeksin K, jolle $|x_n y_n - 0| < \varepsilon$, kun $n > K$.

(b) Ei seuraa. Esimerkki: Olkoon jono (x_n) sellainen, että $x_n = 3$, kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon lisäksi $(y_n) = ((-1)^n)$. Selvästi nähdään, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$ ja $|y_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 7$. Nyt, kun oletuksien voimassaolo on tarkistettu, siirrytään tarkastelemaan tulojonoa $(x_n y_n)$.

Todistetaan, vastaväitteellä: $(x_n y_n) suppenee$.

Olkoon $\varepsilon = 1$ ja $K \in \mathbb{N}$ sellainen, että $|x_n y_n - x_m y_m| < 1$ kaikilla $n, m > K$. Valitaan $n > K$, tällöin

$$|x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}| = |3 \cdot (-1)^n - 3 \cdot (-1)^{n+1}| = 3|1 - (-1)| = 6 > 1 = \varepsilon.$$

Päädyimme ristiriitaan, joten tulojono $(x_n y_n)$ ei suppene. $\square$