

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Analyysi I 2013

### Tehtävät viikolle 49

O-tehtävissä on viime syksyn toisen kurssikokeen tehtävät.

### Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

**O1** Selvitä

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{6x + 1}.$$

Perustele väitteesi huolellisesti kurssin tietojen avulla.

**O2** Määritellään, että  $f(0) = 0$  ja

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

kun  $x \neq 0$ . Osoita, että funktio  $f$  on derivoituva kohdassa  $x = 0$ .

**K1** Derivoi  $x^{\frac{3}{5}}$

- (a) käyttäen koulusta tuttua potenssin derivointisääntöä,
- (b) käyttäen yhdistetyn funktion, käänteisfunktion ja kokonaislukueksponenttia vastaavien potenssien derivointisääntöjä.

**K2** Oletetaan, että  $x > 0$  ja että  $m$ ,  $n$  ja  $p$  ovat positiivisia kokonaislukuja. Osoita juuren määritelmän ja kokonaislukueksponenttia vastaavien potenssien laskusääntöjen nojalla yhtälöt

- (a)  $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ ,
- (b)  $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n^p]{x^{mp}}$ .

**K3** Johda funktion  $\sinh x$  käänteisfunktiolle logaritmilauseke ja derivointikaava. Tutki Hurri-Syrjäsen monistetta sivuilta 84 ja 85. Linkki siihen löytyy laitoksen kotisivulta s 2012 kurssin analyysi 1 kotisivulta.

### Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

**O3** Oletetaan, että funktio  $f$  on jatkuva välillä  $(1, 2)$ . Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \text{ ja että } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty.$$

Osoita, että on olemassa  $a \in ]1, 2[$ , jolle pätee  $f(a) = 7$ .

**O4** Määritellään  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ . Osoita, että kaikilla  $x \geq 0$  pätee

$$\sinh(x) - \sin(x) \geq 0.$$

**K4** Tarkastellaan funktioita  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , missä kaikilla  $x$  asetetaan

$$f(x) = x + \sin x$$

ja

$$g(x) = \frac{x}{2} + \sin x.$$

Selvitä niiden lokaalit ääriarvot.

**K5** Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla  $x > 0$  pätee

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

Piirrä kuva laskimella tms., mikäli mahdollista.

**K6** Johda yhtälö

$$\operatorname{Dar} \cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

missä  $x > 1$ . Kannattaa tutkia Hurri-Syrjäsen monisteen sivuja 84 ja 85.