

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013

Tehtävät viikolle 48

Näissä harjoituksissa

Tehtävät on tarkoitettu harjoittelua varten. Siksi kannattaa kysyä kyllin ajoissa kyllin paljon vinkkejä!

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Etsi monisteesta lokaalin ääriarvon määritelmä. Selvitä yhtälöllä $f(x) = x^2 - 3x + 1$ määritellyn funktion $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ lokaalit ääriarvot. Miten väliarvolause (ja sen seuraukset) liittyy tuloksen perusteluun?

O2 Oletetaan, että $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja että se on derivoituva välillä $(0, 1)$. Oletetaan, että $f(0) = 3$.

(a) Oletetaan, että kaikilla $x \in (0, 1)$ pätee $0 \leq f'(x) \leq 1$. Mitä tämän perusteella voit sanoa arvosta $f(1)$?

(b) Oletetaan, että kaikilla $x \in (0, 1)$ pätee $0 \leq f'(x) \leq x^4$. Mitä tämän perusteella voit sanoa arvosta $f(1)$? Ylärajan määrittämisessä kannattaa soveltaa väliarvolauseita yhtälöllä $g(x) = \frac{1}{5}x^5 - f(x)$ määriteltyyn apufunktion.

K1 Tarkastellaan funktiota $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joka on määritelty yhtälöllä $f(x) = x^3$. Etsi väliarvolauseessa mainittu piste $\xi \in (0, 1)$. Miten tulos liittyy siihen, että väliarvolause ei voisi olla totta, jos meillä olisi vain rationaaliluvut?

K2 Tarkastellaan jatkuvaa funktiota $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa kaikilla $x \in (0, 1)$ ehdon $-2 \leq f'(x) \leq 1$. Mitä tämän perusteella voi sanoa arvosta $f(1)$, jos tiedetään, että $f(0) = 7$?

K3 Tarkastellaan jatkuvaa funktiota $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joka toteuttaa kaikilla $x \in (0, 1)$ ehdon $-2 \leq f'(x) \leq 1$. Mitä tämän perusteella voi sanoa arvosta $f(0)$, jos tiedetään, että $f(1) = 7$?

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Oletetaan, että $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja että se on derivoituva välillä $(0, 1)$. Oletetaan, että kaikilla $x \in (0, 1)$ pätee, että $|f'(x)| \leq 3$. Anna esimerkki sellaisesta luvusta $\delta > 0$, että kaikille välille $[0, 1]$ kuuluville x ja t pätee: jos $|x - t| < \delta$, niin $|f(x) - f(t)| < 10^{-2013}$.

O4 Tarkastellaan funktiota $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, jolle pätee $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = x + x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

kun $x \neq 0$.

- (a) Osoita, että f on derivoituva välillä $(-1, 1)$ ja että $f'(0) = 1$.
 - (b) Onko derivaattafunktio f' rajoitettu välillä $[-1, 1]$?
 - (c) Onko derivaattafunktio f' jatkuva välillä $[-1, 1]$?
 - (d) (Lisäkysymys) Onko f kasvava millään välillä $(-r, r)$, missä $r > 0$?
- Tehtävässä saa käyttää koulusta tuttuja derivointisääntöjä.

K4 Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. Kannattaa huomata, että $\cos 0 = 1$.

K5 Oletetaan, että a_1, \dots, a_n ovat reaalityyppisiä lukuja. Millä x :n arvolla neliösumma

$$(x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$

saa pienimmän arvonsa?

K6 Tarkastellaan funktiota $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, joka on derivoituva välillä $(-1, 1)$. Oletetaan, että derivaattafunktion toispuoleiset raja-arvot

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \quad \text{ja} \quad B = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$$

ovat olemassa. Osoita, että tällöin pätee

$$f'(0) = A = B.$$

Miksi tulos ei ole ristiriidassa tehtävän O4 tuloksen kanssa?