

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Analyysi I 2013

#### Tehtävät viikolle 47

Nyt käydään derivaattojen kimppuun!

#### Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

**O1** Määritellään  $f(x) = x^2$ . Osoita, että kaikilla  $h$  pätee

$$f(3 + h) = f(3) + 6h + h^2.$$

Miten tästä yhtälöstä voi suoraan päätellä derivaatan  $f'(3)$ ?

**O2** Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota. Esitä arvo  $f(3 + h)$  muodossa

$$f(3 + h) = f(3) + 7h + hg(h).$$

Onko tulos ristiriidassa kurssin lauseiden (tarkemmin: sivun 82 lemmän 5.2.9) kanssa?

#### **K1** Derivoi

(a)  $\cos^2(x^5)$ ;

(b)  $\sin^4(\cos^2(x^5))$ ;

(c)  $\sqrt{\sin^4(\cos^2(x^5))}$ .

Tehtävässä on tarkoitus harjoitella yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Kaikkia koulusta tuttuja derivointisääntöjä saa käyttää tässä tehtävässä.

**K2** Määritellään funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ehdolla  $f(x) = |x|^3$ . Millä  $x$  on olemassa derivaatta  $f'(x)$ ? Entä toinen derivaatta  $f''(x)$ ? Entä kolmas derivaatta  $f'''(x)$ ?

**K3** Oletetaan, että  $f'(2) = 3$ . Selvitä

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + 4h) - f(2 - h)}{5h}.$$

Kannattaa vähentää ja lisätä osoittajaan lauseke  $f(2)$ .

#### Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

**O3** Oletetaan, että funktio  $f$  on jatkuva välillä  $[0, 5]$  ja derivoituva välillä  $(0, 5)$ . Oletetaan lisäksi, että kaikilla  $x \in (0, 5)$  pätee  $-1 < f'(x) < 3$ . Mitä tämän perusteella voidaan sanoa arvosta  $f(5)$ , jos tiedetään, että  $f(0) = 7$ ? Tehtävässä on tarkoitus käyttää väliarvolausetta.

**O4** Johda tulon derivoimisääntö differentioituvuuden (lemma 5.2.9. sivulla 82) avulla. Toisin sanoen, tarkastellaan yhtälöitä

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hu(h)$$

ja

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hv(h),$$

missä  $u(h) \rightarrow 0$  ja  $v(h) \rightarrow 0$  kun  $h \rightarrow 0$ . Kerro yhtälöiden oikeat puolet keskenään. Mitä huomaat?

**K4** Määritellään funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla  $f(x) = \sqrt{x}$ , kun  $x \geq 0$  ja  $f(x) = -\sqrt{-x}$ , kun  $x < 0$ . Missä pisteissä  $f$  on derivoituva?

**K5** Tarkastellaan yhtälöllä  $f(x) = x^4$  määriteltyä funktiota  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Päättele derivaatta  $f'(x)$  lemmän 5.2.9. avulla yhtälöstä

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4.$$

**K6** Oletetaan, että  $p$ ,  $q$  ja  $r$  ovat reaalilukuja ja että  $p > 0$ . Osoita, että yhtälöllä

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: merkitse  $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$  ja sovelta kurssin tietoja.