MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävät viikolle 46

Näissä harjoituksissa käytetään funktion raja-arvoja ja jatkuvien funktioiden ominaisuuksia koskevia kurssin tietoja. Derivaattoja koskevia tietoja ei saa käyttää.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Tarkastellaan yhtälöllä

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 1}$$

määriteltyä funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(a) Osoita, että $f(x) \to 0$ kun $x \to \infty$.
(b) Osoita, että on olemassa $c > 0$, jolle $f(c) = 7^{-100}$.

O2 Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota.
(a) Osoita, että $f(x) \to 0$ kun $x \to -\infty$.
(b) Osoita, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \leq f(c)$. Toisin sanoen niiden arvojen joukossa, joita f saa on suurin arvo.

K1 Osoita määritelmien perusteella, että

$$x^7 - x^3 + 1 \to \infty$$

kun $x \to \infty$ ja että

$$x^7 - x^3 + 1 \to -\infty$$

kun $x \to -\infty$.

K2 Osoita Bolzanon lauseen avulla, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle pätee

$$c^7 - c^3 + 1 = 2013.$$

K3 Oletetaan, että $f(x) \to a$, kun $x \to x_0$. Oletetaan lisäksi, että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikille x pätee: jos $0 <$

$|x - x_0| < \delta$, niin $|f(x)| > |a|/2$. Vihjeitä: käytä arvoa $\varepsilon = |a|/2$. Väite voi tuntua vähemmän abstraktilta, jos tarkastelet tapauksia $a > 0$ ja $a < 0$ erikseen.

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x^5 + x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva aidosti kasvava käänteisfunktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

O4 Onko yhtälöllä $f(x) = \sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ käänteisfunktiota $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

K4 Osoita, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle pätee $\sqrt[5]{c} + \sqrt[3]{c} = 42$.

K5 Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + \sqrt{x}$ määritellyllä funktiolla $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ on jatkuva aidosti kasvava käänteisfunktio $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

K6 Oletetaan, että jatkuva funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ epäyhtälön $0 \leq f(x) \leq 7$. Määritellään funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita g saa on suurin arvo.