

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013

Tehtävät viikolle 45

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}.$$

O2 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 7} = \infty$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x^2 + 1}{x - 7} = \infty.$$

K1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

K2 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 7} = \frac{1}{4}.$$

K3 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \infty.$$

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x?$$

Tehtävässä saa käyttää sinifunktiosta kaikkia koulusta tuttuja tietoja. Ratkaisua helpottaa, jos muotoilet ja todistat jonkin sopivan aputuloksen.

O4 Oletetaan, että funktio $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ on kasvava. Mitä voimme päätellä, jos tiedämme lisäksi, ettei f ole jatkuva kohdassa $x = 0$?

K4 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = \infty.$$

K5 Oletetaan, että funktio $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ on kasvava ja että $a < c < b$. Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

K6 Oletetaan, että funktio $f: (1, 7) \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva kohdassa $x = 2$. Oletetaan lisäksi, että $f(2) = 3$ ja $f'(2) = 4$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikille $x \in (2, 2 + h)$ pätee

$$3 + \left(4 - \frac{1}{5}\right)(x - 2) < f(x) < 3 + \left(4 + \frac{1}{5}\right)(x - 2).$$

(Piirrä kuva!) Tehtävässä kannattaa soveltaa funktion raja-arvon määrittelyä raja-arvotietoon

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 4.$$

(Mistä me tämän tiedämme?)