

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Analyysi I 2013

#### Tehtävät viikolle 44

#### Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

**O1** (a) Miten määrittelet funktion käsitteen?

(b) Mitkä ovat tärkeimmät lukiossa opitut tiedot jatkuvista ja derivoituvista funktioista? Mitä niistä on todistettu lukiossa?

(c) Mitä haluat oppia funktioiden raja-arvoista, jatkuvuudesta ja derivaatasta tällä kursilla?

**O2** (a) Miten funktioiden jatkuvuus ja derivoituvuus on määritelty lukiossa?

(b) Seuraako derivoituvuudesta jatkuvuus?

(c) Seuraako jatkuvuudesta derivoituvuus?

**K1** (a) Etsi jokin luku  $A > 0$ , jolle kaikilla  $x \in (6, 8)$  pätee

$$|x^2 - 49| \leq A|x - 7|.$$

(b) Oletetaan, että  $\varepsilon > 0$ . Osoita, että on olemassa sellainen luku  $\delta > 0$ , että kaikille  $x \in (7 - \delta, 7 + \delta)$  (eli aina kun  $|x - 7| < \delta$ ,) pätee

$$|x^2 - 49| < \varepsilon.$$

**K2** (a) Etsi jokin luku  $A > 0$ , jolle kaikilla  $x \in (1, 3)$  pätee

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \right| \leq A|x-2|.$$

(b) Oletetaan, että  $\varepsilon > 0$ . Osoita, että on olemassa sellainen luku  $\delta > 0$ , että kaikille  $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$  pätee

$$\left| \frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} \right| < \varepsilon.$$

**K3** (a) Etsi jokin luku  $A > 0$ , jolle kaikilla  $x \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$  pätee

$$|\sqrt{x} - \frac{1}{2}| \leq A|x - \frac{1}{4}|.$$

(b) Oletetaan, että  $\varepsilon > 0$ . Osoita, että on olemassa sellainen luku  $\delta > 0$ , että kaikille  $x \in (\frac{1}{4} - \delta, \frac{1}{4} + \delta)$  pätee

$$|\sqrt{x} - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

### Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

**O3** Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella, että ehdolla  $f(x) = \sqrt{x}$  määritelty funktio  $f: [0, 42] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva kohdassa  $x = 9$ .

**O4** Osoita funktion raja-arvon ja derivaatan määritelmien perusteella, että tehtävän O3 funktio on derivoituva kohdassa  $x = 9$  ja että  $f'(9) = \frac{1}{6}$ .

**K4** Osoita funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmien perusteella, että ehdolla  $f(x) = x^2 + 3x$  määritelty funktio  $f: (0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva kohdassa  $x = 1$ .

**K5** Onko ehdolla  $f(x) = |x|$  määritelty funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivoituva kohdassa  $x = 0$ ?

**K6** Oletetaan, että  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  toteuttaa ehdon  $|f(x)| \leq 3$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Määritellään funktio  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  yhtälöllä

$$g(x) = x^2 f(x).$$

Osoita, että funktio  $g$  on derivoituva kohdassa  $x = 0$ . (Vapaaehtoinen lisäkysymys: voidaanko  $f$  valita niin, ettei  $g$  ole derivoituva missään muualla?)