

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013

Tehtävät viikolle 41

Tällä kertaa lopetellaan lukujonon raja-arvon käsittelyä. Uusia piirteitä siellä ovat mm. Bernoullin epäyhtälö ja ”eksponenttilausekkeiden” tarkastelu sekä rajatta kasvaminen ja rajatta väheneminen.

Tehtävien O1 - O4 on tarkoitus antaa kuvaa siitä, millainen koe saattaisi olla. Ohessa ei yhtään tehtävää suuruusjärjestyksestä tai itseisarvoista. Sellainen saattaa kuitenkin olla kokeessa. Tällä kertaa vaativin tehtävä koskee supremumin käsitettä. Se saattaa koskea muutakin kohtaa koalueesta.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{2n + 1}.$$

Perustelu!

O2 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \rightarrow 1 \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

K1 (a) Osoita, että $5^n \geq 1 + 4n$ kun $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Osoita että

$$\frac{1}{5^n} \rightarrow 0 \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

K2 Osoita, että

$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} \rightarrow \infty \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

K3 Osoita, että

$$\frac{1 + n^2}{1 - 2n} \rightarrow -\infty \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{n^2 - 2}{n + 1} \rightarrow \infty \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

O4 Oletetaan, että reaalilukujen joukot A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja. Osoita, että

$$\sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\} = \sup A + \sup B.$$

K4 Osoita, että

$$n^2 - n \rightarrow \infty \text{ kun } n \rightarrow \infty.$$

K5 Selvitä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$$

käyttäen hyväksi tietoa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Tehtävässä saa käyttää myös tietoa, että jos $x_n \rightarrow a$ kun $n \rightarrow \infty$, niin $\sqrt[3]{x_n} \rightarrow \sqrt[3]{a}$ kun $n \rightarrow \infty$. (Mitenköhän tämän tiedon voisi todistaa?)

K6 Oletetaan, että $x_n \rightarrow \infty$ ja $y_n \rightarrow a$ kun $n \rightarrow \infty$; tässä a on reaaliluku. Pitääkö paikkansa, että tällöin $x_n + y_n \rightarrow \infty$ kun $n \rightarrow \infty$?