MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävät viikolle 40

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2}.$$

Saat käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(1/n)$ raja-arvosta.

O2 Määritä joukon

$$\{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

supremum ja infimum. Onko joukolla suurinta tai pienintä alkiota?

K1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{6n^2+6}.$$

Saat käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(1/n)$ raja-arvosta.

K2 Käy läpi (laadi) todistus seuraavalle monisteessa esitetylle lukujonon raja-arvon ominaisuudelle:

Oletetaan, että $x_n \to a$ ja $y_n \to b$ kun $n \to \infty$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$. Osoita, että tällöin $a \leq b$.

K3 Tässä tehtävässä käytetään tulosta: jos nouseva jono on ylhäältä rajoitettu, niin se suppenee.

Oletetaan, että jono (x_n) on nouseva ja jono on (y_n) suppeneva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$. Osoita, että jono (x_n) on suppeneva.

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja, että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa kynnys K, jota suuremmilla n pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Tehtävän voi ratkaista esimerkiksi niin, että tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$. Tässä auttaa kuva.

O4 Mitä tiedät induktiosta? Mitä haluat tietää siitä? Todista induktiolla, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

K4 Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\frac{(x_n)^3}{n} \to 0$$

kun $n \to \infty$.

K5 Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että on olemassa reaaliluku

$$a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}.$$

Osoita lisäksi, että $a^2 = 5$. (Tehtävässä osoitetaan siis, että reaalilukujen "aksiomeista"seuraaa luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo.)

K6 Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että seuraava lukujono suppenee, ja että sen raja-arvo on $\sqrt{5}$:

$$x_1 = 3$$

ja

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$.