

## MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

### Analyysi I 2013

#### Tehtävät viikolle 38

Hyödyllisiä tietoja:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  ja  $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + a^3)$ .

#### Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

**O1** Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön  $|x - 7| < 3^{17}$ ? Arvaa ensin vastaus ajatteleamalla itseisarvoa etäisyytenä. Todista sitten arvauksesi oikeaksi itseisarvolemman avulla. (Itseisarvolemman mukaan ehdot  $|t| < a$  ja  $-a < t < a$  ovat yhtäpitäviä.)

**O2** Mitkä luvut toteuttavat epäyhtälön  $|2x - 8| < 3^{17}$ ?

**K1** Etsi sellainen luku  $K$ , että kaikilla välille  $(1, 3)$  kuuluville luvuille  $x$  pätee  $|x^2 - 4| \leq K|x - 2|$ . Kannattaa esittää  $x^2 - 4$  tulona.

**K2** Etsi sellainen luku  $K$ , että kaikilla välille  $(1, 3)$  kuuluville luvuille  $x$  pätee  $|x^3 - 8| \leq K|x - 2|$ . Kannattaa esittää  $x^3 - 8$  tulona.

**K3** Muistele koulun pyöristyssääntöjä.

(a) Minkä välin muodostavat ne reaali-luvut, joiden likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella on 15,15?

(b) Oletetaan, että  $|x - e^e| < 2^{-1}10^{-3}$ ? Mitä tiedät luvun  $x$  desimaalikehitelmästä?

(c) Entä jos  $|x - e^e| < 2^{-1}10^{-10}$ ?

Luvun  $e^e$  desimaalikehitelmä alkaa näin:

15,154262241479264189760430272629911905528548536856.

#### Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

**O3** Oletetaan, että  $|x - e| < 9^{-9}$  ja  $|y - \pi| < 9^{-9}$ . (a) Mitä tiedät itseisarvosta  $|(x + y) - (e + \pi)|$ ?

(b) Mitä tiedät itseisarvosta  $|xy - e\pi|$ ? Tässä kannattaa erotukseen lisätä ja vähentää  $x\pi$ .

Tässä (ja seuraavassa) tehtävässä saa olettaa tunnetuksi, että  $2,71 < e <$

2, 72 ja 3,  $14 < \pi < 3, 15$ .

**O4** Oletetaan, että  $|x - e| < 9^{-9}$  ja  $|y - \pi| < 9^{-9}$ . Mitä tiedät itseisarvosta

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{e}{\pi} \right|?$$

**K4** Todista itseisarvon määritelmän avulla:

- (a)  $|x| \geq 0$
- (b)  $|x| = |-x|$
- (c)  $|xy| = |x||y|$ .

**K5** Etsi sellainen  $r > 0$ , että kaikilla  $x \in (2 - r, 2 + r)$  pätee  $|x^2 - 4| < 10^{-100}$ . Kannattaa soveltaa tehtävän K1 tulosta.

**K6** Etsi sellainen  $r > 0$ , että kaikilla  $x \in (2 - r, 2 + r)$  pätee  $|x^3 - 8| < 10^{-100}$ . Kannattaa soveltaa tehtävän K2 tulosta.