

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013

Tehtävät viikolle 37

Analyysin kurssin viikottaiset tehtävät numeroidaan viikonnumeroiden mukaan. Tehtävät jakautuvat alkuviikon tehtäviin ja loppuviikon tehtäviin. Molempiin kuuluu kaksi ohjaustehtävää ja kolme kotitehtävää. Ohjaustehtäviä ei ole tarpeen tehdä etukäteen. Tehtävät saattavat käsitellä sellaisia oppimateriaalin kohtia, joita ei ole vielä käsitelty luennoilla. Silloin niiden tarkoituksena on pohjustaa luentoja.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y , että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nolllalla ei saa jakaa?

O2 Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{n+2}{n^2+3} \leq \frac{3}{n}.$$

Vihje: käytä suuruusjärjestyksen ominaisuuksia. Mitä tapahtuu, jos vasemalla puolella kasvatat osoittajaa ja pienennät nimittäjää?

K1 Osoita, että $\sqrt[5]{3}$ on irrationaalinen. Voit mukailla luennoilla kerrattua todistusta sille, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

K2 Onko

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}$$

rationaalinen vai irrationaalinen?

K3 Onko $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Onko $\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

O4 (a) Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $x^2 < y^2$. (b) Oletetaan, että $1 < x$. Päteekö, että $x^3 < x^7$? Perustelu!

K4 Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{5}{4}.$$

K5 Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2}{9}.$$

K6 (a) Laske erotus

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}$$

ja osoita, että se on positiivinen.

(b) Oletetaan, että $n > 10^{100}$. Osoita, että

$$\frac{1}{2} < \frac{2n+3}{4n+5} < \frac{1}{2} + 10^{-100}.$$

Kannattaa käyttää (a)-kohdassa laskettua erotusta.