MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävät viikolle 40
Ratkaisuehdotuksia loppuviikolle, Jaakko Jokinen

O3 Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja, että $a \neq 0$. Osoita, että on olemassa kynnys K, jota suuremmilla n pätee

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Tehtävän voi ratkaista esimerkiksi niin, että tarkastellaan erikseen tapauksia $a < 0$ ja $a > 0$. Tässä auttaa kuva.

Ratkaisu. Jos $x_n \to a$, niin $|x_n| \to |a|$ (todistuu helposti $\Delta - ey$:llä). Koska siis $|x_n| \to |a|$, niin $|x_n| > |a| - \varepsilon$. Olkoon $\varepsilon = \frac{1}{2}|a|$. Nyt $|x_n| > |a| - \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}|a|$. Siis on olemassa kynnys K, jolloin pätee $|x_n| > \frac{1}{2}|a|$, kun $n > K$.

Toinen tapa: Koska $x_n \to a$, niin on olemassa sellainen kynnys K, että kaikilla $n > K$ pätee

$$|x_n - a| < \frac{1}{2}|a|.$$

Tästä saadaan itseisarvolemmalla epäyhtälöt

(1) $-\frac{1}{2}|a| + a < x_n$

(2) $x_n < \frac{1}{2}|a| + a.$

Jos $a > 0$, niin

$$(1) \quad -\frac{1}{2}a + a < x_n \Rightarrow \frac{1}{2}a < x_n \Rightarrow \frac{1}{2}|a| < |x_n|.$$

Jos $a < 0$, niin

$$(2) \quad x_n < a - \frac{1}{2}a \Rightarrow x_n < \frac{1}{2}a \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

O4 Mitä tiedät induktiosta? Mitä haluat tietää siitä? Todista induktiolla, että kaikilla $n = 1, 2, 3, \ldots$ pätee

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Ratkaisu. Osoitetaan, että väite pätee arvolla $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1.$$

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee arvolla $n = k$.

Osoitetaan, että väite pätee arvolla $n = k + 1$.

$$\sum_{a=1}^{k+1} a^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \qquad (1)$$

Käytetään induktio-oletusta ja tarkastellaan yhtälön (1) vasenta puolta:

$$\sum_{a=1}^{k}(a^2)+(k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}.$$

Lasketaan auki yhtälön (1) oikea puoli ja osoitetaan, että se on sama kuin vasen puoli:

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}.$$

Yhtälön (1) vasen ja oikea puoli ovat siis samat, joten alkuperäinen väite pätee.

K4 Oletetaan, että jono (x_n) suppenee. Osoita, että

$$\frac{(x_n)^3}{n} \to 0$$

kun $n \to \infty$.

Ratkaisu. Tiedetään, että jos lukujonoille (x_n) ja (y_n) pätee $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, niin niiden tulon raja-arvolle pätee $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab$. Voidaan kirjoittaa

$$\frac{(x_n)^3}{n} = \frac{1}{n}(x_n)^3 = \frac{1}{n}(x_n)(x_n)(x_n).$$

Tietoa lukujonojen tulon raja-arvosta voidaan soveltaa induktiivisesti, jolloin saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}(x_n)(x_n)(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}(x_n)\lim_{n\to\infty}(x_n)\lim_{n\to\infty}(x_n).$$

Lukujono (x_n) suppenee, joten sillä on raja-arvo, jota merkitsemme luvulla $a \in \mathbb{R}$. Jonon $\frac{1}{n}$ raja-arvo on tunnetusti 0, joten saadaan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_n)^3}{n} = 0 \cdot a \cdot a \cdot a = 0.$$

K5 Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että on olemassa reaaliluku

$$a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}.$$

Osoita lisäksi, että $a^2 = 5$. (Tehtävässä osoitetaan siis, että reaalilukujen "aksiomeista" seuraa luvun $\sqrt{5}$ olemassaolo.)

Ratkaisu. Osoitetaan ensin, että $a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$ on olemassa näyttämällä, että kyseinen joukko on ylhäältä rajoitettu ja epätyhjä. Merkitään $A := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ ja } x^2 < 5\}$. Joukolla A on selvästi yläraja, sillä $3 \in \mathbb{R}$ ja $3^2 = 9 > 5$ eikä se ole myöskään tyhjä, sillä $1 \in \mathbb{R}$ ja $1^2 = 1 \in A$. Osoitetaan, että $a^2 = 5$ osoittamalla, että $a^2 > 5 \Rightarrow a \neq \sup A$ ja $a^2 < 5 \Rightarrow a \neq \sup A$. Oletetaan, että $h > 0$ ja $x \in A$.

1. Oletetaan, että $a^2 > 5$. Tutkitaan lukua $(a-h)^2$. Nyt jos keksimme jonkin positiivisen luvun h siten, että $(a-h)^2 = a^2 - 2ah + h^2 > a^2 - 2ah > 5 > x^2$, niin $a - h > x$ eli $a - h$ on joukon yläraja. Näin ollen $a \neq \sup A$.

2. Oletetaan, että $a^2 < 5$. Tutkitaan lukua $(a+h)^2$. Nyt jos keksimme jonkin positiivisen luvun $h < 1$ siten, että $(a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2 < a^2 + 2ah + h < 5$ eli $a + h \in A$. Siis $a \neq \sup A$.

Siis koska oletuksista $a^2 > 5$ ja $a^2 < 5$ seurasi, että $a \neq \sup A$, niin on oltava $a = \sup A$, kun $a^2 = 5$. Näin ollen $\sqrt{5}$ on olemassa.

K6 Mukaile luentojen esimerkkiä ja osoita, että seuraava lukujono suppenee, ja että sen raja-arvo on $\sqrt{5}$:

$$x_1 = 3$$

ja
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$
kaikilla $n = 1, 2, 3, \dots$.

Ratkaisu. Selvästi $x_n > 0$, koska ensimmäinen jäsen on positiivinen ja loput jäsenet ovat näin ollen aina keskiarvoja positiivisista luvuista. Osoittaaksemme, että (x_n) on laskeva pitää meidän näyttää, että $x_n > \frac{5}{x_n}$, siis $x_n > \sqrt{5}$. Tutkitaan erotusta $x_n - \sqrt{5}$ ja näytetään, että se on positiivinen.
$$x_n - \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{5}{x_{n-1}}\right) - \sqrt{5} = \frac{x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}\sqrt{5} + 5}{2x_{n-1}} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{5})^2}{2x_{n-1}}.$$
Nyt osoittaja sekä nimittäjä ovat positiivisia, koska $x_n > 0$ ja näin ollen (x_n) on laskeva ja alhaalta rajoitettu, siis suppeneva. Osoitetaan seuraavaksi, että jonon raja-arvo on $\sqrt{5}$. Kun $n \to \infty$, niin $x_n \to x_{n+1}$. Tällöin $x_n \to a$ ja
$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{5}{a}\right) \Leftrightarrow 2a = a + \frac{5}{a} \Leftrightarrow a = \frac{5}{a} \Leftrightarrow a^2 = 5 \Leftrightarrow a = \sqrt{5}.$$