MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävien ratkaisut loppuviikolle 46

Loppuviikon tehtävät O3, O4; K4, K5 ja K6

O3 Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x^5 + x^3$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva aidosti kasvava käänteisfunktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu: Huomataan, että funktio f on viidennen asteen polynomifunktio. Kurssimateriaalin lauseen **4.1.11.** nojalla f on siis jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Tutkitaan funktion f kasvavuutta. Olkoon $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja $x_1 < x_2$. Soveltamalla vastaavaa päättelyä kuin viikon 37 tehtävässä **O4** voidaan huomata, että tällöin, kun $0 \leq x_1$, pätee $x_1^3 < x_2^3$ ja $x_1^5 < x_2^5$.

Tilanne jossa vain $x_1 < 0$ ja $0 < x_2$ on selvä, sillä parittomat potenssit säilyttävät merkin.

Jos taas myös $x_2 < 0$, huomataan, että $|x_1| > |x_2|$. Tällöin soveltamalla taas viikon 37 tehtävän **O4** päättelyä saadaan $|x_1^3| > |x_2^3|$ ja $|x_1^5| > |x_2^5|$. Koska nyt $x_1, x_2 < 0$, ja koska parittomat potenssit säilyttävät merkin, pätee $x_1^3 < x_2^3$ ja $x_1^5 < x_2^5$.

Siis kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ pätee, että jos $x_1 < x_2$ niin $f(x_1) = x_1^5 + x_1^3 < x_2^5 + x_2^3 = f(x_2)$. Näin ollen funktio f on aidosti kasvava. Aidosti kasvava funktio ei saa koskaan kahta samaa arvoa, ja toisaalta funktion f kuva on koko $\mathbb{R}$. Se on siis bijektio, ja sillä on olemassa käänteiskuvaus $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nyt kurssimateriaalin lauseen **4.2.5.** nojalla funktio g on aidosti kasvava ja jatkuva.

O4 Onko yhtälöllä $f(x) = \sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}$ määritellyllä funktiolla $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ käänteisfunktiota $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu: Edellisen tehtävän nojalla kuvaukset $x \mapsto x^3$ ja $x \mapsto x^5$ ovat jatkuvia ja aidosti kasvavia. Lauseen **4.2.5.** nojalla niiden käänteiskuvaukset $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ja $x \mapsto \sqrt[5]{x}$ ovat siis myös aidosti kasvavia ja jatkuvia.

Koska siis kaikille $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 < x_2$ pätee $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$ ja $\sqrt[5]{x_1} < \sqrt[5]{x_2}$ niin selvästi pätee myös $f(x_1) = \sqrt[5]{x_1} + \sqrt[3]{x_1} < \sqrt[5]{x_2} + \sqrt[3]{x_2} = f(x_2)$.

Siis f on aidosti kasvava ja kahden jatkuvan kuvauksen summana myös jatkuva (kurssimateriaalin lause **4.1.9.**). Näin ollen kuten edellä, funktiolla

f on olemassa käänteisfunktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on vieläpä aidosti kasvava ja jatkuva.

K4 Osoita, että on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle pätee $\sqrt[5]{c} + \sqrt[3]{c} = 42$.

Ratkaisu: Tehtävästä **O4** tiedetään, että funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}$ on jatkuva. Lisäksi esimerkiksi $f(1) = 2$ ja toisaalta $f(10^9) \approx 1063{,}096$. Huomataan, että $f(1) < 42 < f(10^9)$.

Bolzanon korollaarin eli kurssimateriaalin korollaarin **4.2.2.** nojalla f saa jokaisen arvon, joka on lukujen $f(1)$ ja $f(10^9)$ välissä. Siispä on olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle $f(c) = \sqrt[5]{c} + \sqrt[3]{c} = 42$.

K5 Osoita, että yhtälöllä $f(x) = x + \sqrt{x}$ määritellyllä funktiolla $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ on jatkuva aidosti kasvava käänteisfunktio $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Ratkaisu: Kuvaus $x \mapsto x$ on ensimmäisen asteen polynomi ja kuvaus $x \mapsto \sqrt{x}$ on toisen asteen polynomin $x \mapsto x^2$ käänteiskuvaus. Materiaalin lauseen **4.1.11.** nojalla ensimmäinen on jatkuva koko reaalilukujen joukossa ja korollaarin **4.2.6.** nojalla toinen on jatkuva ja lisäksi aidosti kasvava välillä $[0,\infty)$ eli molemmat ovat jatkuvia funktion f koko määrittelyjoukossa.

Lauseen **4.1.9** nojalla kahden jatkuvan funktion summa on jatkuva, joten myös f on jatkuva koko määrittelyjoukossaan. Lisäksi pitää tutkia funktion f kasvavuus.

Olkoon $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ ja $x_1 < x_2$. Nyt siis pätee

$$f(x_1) = x_1 + \sqrt{x_1} < x_2 + \sqrt{x_1} \overset{(*)}{<} x_2 + \sqrt{x_2} = f(x_2)$$

Ylläolevassa päättelyssä kohdassa $(*)$ käytetään tietoa, että $x \mapsto \sqrt{x}$ on tällä välillä aidosti kasvava. Siispä funktio f on aidosti kasvava ja jatkuva koko määrittelyjoukossaan, joten sillä on olemassa lauseen **4.2.5.** nojalla jatkuva ja aidosti kasvava käänteisfunktio $g\colon f((0,\infty)) \to \mathbb{R}$.

Huomataan, että $f(x) > 0$ kaikilla $x \in (0,\infty)$. Funktio f siis saa vain positiivisia arvoja, joten sen arvojoukko sisältyy väliin $(0,\infty)$. Huomataan, että kaikille $M > 0$ voidaan valita $x_m = M$, jolloin ehdosta $x > x_m$ seuraa

$$f(x) = x + \sqrt{x} \geq x > x_m = M$$

Siispä $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$. Siis funktion f arvot kasvavat rajatta, kun x kasvaa rajatta. Lisäksi huomataan, että kaikille $\varepsilon > 0$ löydetään $\delta =$

$\min\{1, \frac{\varepsilon^2}{4}\}$, jolla ehdosta $x \in (0, 0+\delta) \Leftrightarrow 0 < x < \delta$ seuraa

$$f(x) = x + \sqrt{x} \overset{(!)}{\leq} 2\sqrt{x} < 2\sqrt{\delta} \leq 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Siispä $f(x) \to 0$, kun $x \to 0^+$. Kohdassa (!) huomataan, että jos $x \in (0,1)$, niin $x^2 < x \Leftrightarrow x < \sqrt{x}$.

Näistä tuloksista seuraa, että f saa kaikki arvot väliltä $(0, \infty)$ ja näin $f((0,\infty)) = (0, \infty)$. Siispä funktion g määrittelyjoukko on väli $(0,\infty)$ eli pätee $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

K6 Oletetaan, että jatkuva funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa kaikilla $x \in \mathbb{R}$ epäyhtälön $0 \leq f(x) \leq 7$. Määritellään funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yhtälöllä

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Osoita, että niiden arvojen joukossa, joita g saa on suurin arvo.

Ratkaisu: Todetaan ensin, että kuvaus $x \mapsto x^4 + x^2 + 1$ on neljännen asteen polynomi ja siis lauseen **4.1.11.** nojalla jatkuva ja lisäksi eri kuin nolla kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktion f jatkuvuus on annettu. Lauseen **4.1.9** nojalla kahden jatkuvan funktion osamäärä on jatkuva funktio eli g on jatkuva.

Huomataan, että kaikille $\varepsilon > 0$ löytyy $x_1 = \max\{1, \frac{7}{\varepsilon}\}$, jolle ehdosta $x > x_1$ seuraa

$$0 \leq |g(x) - 0| = \left| \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1} \right| \leq \frac{7}{x^4 + x^2 + 1} \leq \frac{7}{x} < \frac{7}{x_1} \leq \frac{7}{\frac{7}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

eli

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Vastaavasti löytyy $x_2 = \min\{-1, -\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}}\}$, jolle ehdosta $x < x_2$ seuraa

$$0 \leq |g(x) - 0| = \left| \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1} \right| \leq \frac{7}{x^4 + x^2 + 1} \leq \frac{7}{x^2} < \frac{7}{x_2^2} \leq \frac{7}{(-\sqrt{\frac{7}{\varepsilon}})^2} = \varepsilon$$

eli

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

Voidaan olettaa, että on olemassa x, jolle $f(x) \neq 0$. Muussa tapauksessa g saa arvon 0 jokaisella $x \in \mathbb{R}$ ja tällöin funktion g suurin arvo on selvästi 0. Olkoon nyt $\xi \in \mathbb{R}$ sellainen, että $g(\xi) \neq 0$. Nyt ylläolevien raja-arvotietojen nojalla löytyvät sellaiset $a, b \in \mathbb{R}$, että kaikilla $x < a$ ja kaikilla $x > b$ pätee $g(x) < g(\xi)$. Siispä funktion g suurimman arvon täytyy löytyä väliltä $[a, b]$, sillä kaikki muut arvot ovat pienempiä kuin $g(\xi)$. Tästä seuraa myös se, että $\xi \in [a, b]$.

Weierstrassin lauseen eli lauseen **4.3.3.** nojalla jatkuva funktio saa suljetulla välillä suurimman (ja pienimmän) arvon. Siis g:llä on suurin arvo välillä $[a, b]$. Merkitään tätä $g(c)$:llä, missä $c \in [a, b]$. Koska funktio g saa arvon $g(\xi)$ vain tällä välillä ja kaikkialla muualla tätä pienempiä arvoja, ja koska $g(c) \geq g(\xi)$, on pakko päteä, että $g(c)$ on kaikista funktion saamista arvoista suurin. Siispä funktiolla g on suurin arvo.