O1:

Olk. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^4+1}$. On osoitettava, että

a) $f(x) \to 0$, kun $x \to \infty$

b) $\exists c > 0$, jolle $f(c) = 7^{-100}$ (Tästä tehtävästä kannattaa piirtää kuva!)

a) Olk. $\varepsilon > 0$

Koska tutkimme f:n arvoja, kun x kasvaa rajatta, voimme olettaa, että $x > 1$. Tällöin

$$\left| \frac{x^2+x+1}{x^4+1} - 0 \right| = \frac{x^2+x+1}{x^4+1} \qquad \| \; x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x$$

$$< \frac{x^2+x^2+x^2}{x^4+1} \qquad \| \; \frac{1}{x^4+1} < \frac{1}{x^4}$$

$$< \frac{3x^2}{x^4} = \frac{3}{x^2}$$

Nyt $\frac{3}{x^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} < x$. Valitaan siis $K = \max\{1, \sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\}$

Tällöin

$$\left| \frac{x^2+x+1}{x^4+1} - 0 \right| = \frac{x^2+x+1}{x^4+1} < \frac{3}{x^2} < \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}^2} = \varepsilon,$$

kun $x > K$ $\square$

b) Huomataan, että $f(1) = \frac{1^2+1+1}{1^4+1} = \frac{3}{2}$. a)-kohdan perusteella on olemassa $K \in \mathbb{R}$ s.e. $|f(x)| = f(x) < 7^{-100}$. Olk. $a > K$. Koska f on jatkuva, Bolzanon lauseen korollaarin perusteella f saa kaikki arvot väliltä $(f(a), \frac{3}{2})$, eli on olemassa $c > 0$ s.e. $f(c) = 7^{-100}$ $\square$

O2:

Olk. $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^4+1}$. On osoitettava, että

a) $f(x) \to 0$, kun $x \to -\infty$

b) On olemassa $c \in \mathbb{R}$, jolle $\forall x \in \mathbb{R}$ pätee $f(x) \leq f(c)$
(Tästä tehtävästä kannattaa piirtää kuva!)

a) Koska tutkimme f:n arvoja, kun x pienenee rajatta, voidaan olettaa, että $x < -1 \iff x^2 > -x \iff x^2 + x > 0$
Olk. $\varepsilon > 0$, nyt

$$\left| \frac{x^2+x+1}{x^4+1} - 0 \right| = \frac{x^2+x+1}{x^4+1} \qquad \| \, x < -1$$

$$< \frac{x^2-1+1}{x^4+1} \qquad \left\| \, \frac{1}{x^4+1} < \frac{1}{x^4} \right.$$

$$< \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

Huomataan, että $\dfrac{1}{x^2} < \varepsilon \iff \dfrac{1}{\varepsilon} < x^2$

$$\iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} < |x| = -x$$

$$\iff -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} > x$$

Valitaan $K = \min\{-1, -\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\}$, nyt

$$\left| \frac{x^2+x+1}{x^4+1} - 0 \right| < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\left(-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon,$$

kun $x < K$. $\square$

b) Huomataan nyt, että $f(0) = \frac{0+0+1}{0+1} = 1$.

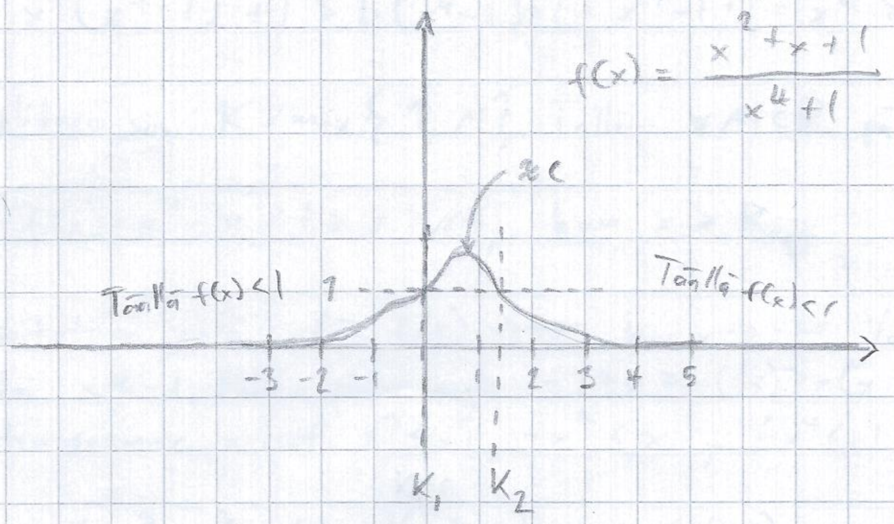
Koska $f(x) \to 0$, kun $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$, on olemassa sellaiset K_1, K_2, että

$f(x) < 1$, kun $x < K_1$ ja $f(x) < 1$, kun $x > K_2$.

Lisäksi f on jatkuva, sillä $x^4+1 \geq 1 > 0$, joten Weierstrassin lauseen perusteella f:llä on suurin arvo suljetulla välillä $[K_1, K_2]$. Merkitään tätä pistettä c:llä. Nyt siis $\forall x \in [K_1, K_2]$ pätee $f(x) \leq f(c)$. Toisaalta tiedämme, että $f(c) \geq f(0) = 1$, sillä $0 \in [K_1, K_2]$. Koska $\forall x > K_1$ ja $\forall x < K_2$ pätee $f(x) < 1$, täytyy myös olla

$f(x) < 1 = f(0) \leq f(c)$

Siis $f(x) \leq f(c)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$



Tässä tapauksessa kuva olisi jotakuinkin tämän näköinen. Voimme kuitenkin valita minkä tahansa pisteen nollan sijasta, minkälaisia kuvia silloin saisimme aikaan?

K1: Olk. $f(x) = x^7 - x^3 + 1$

Osoita määritelmien perusteella, että

$f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$ ja $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$

Ratkaisu: Näytetään ensin, että $f(x) \to \infty$, kun $x \to \infty$.

Koska olemme kiinnostuneita f:n arvoista, kun x kasvaa rajatta, voimme olettaa, että $x > 1$. Olk. $M \in \mathbb{R}$, nyt

$$f(x) = x^7 - x^3 + 1 = x^3(x^4 - 1) + 1$$

Huomataan, että kun $x > 1$, niin pätee myös

$$1 < x = 1 \cdot x < x \cdot x = x^2 = 1 \cdot x^2 < x \cdot x^2 = x^3 < x^4$$

Saamme siis arviot $x^3 > 1$, $x^4 > x$ ja $x^4 > 1 \Leftrightarrow x^4 - 1 > 0$, nyt

$$x^3(x^4 - 1) + 1 > 1 \cdot (x^4 - 1) + 1 = x^4 - 1 + 1 = x^4 > x$$

Valitaan siis $K = \max\{1, M\}$. Tällöin $\forall M \in \mathbb{R}$ pätee

$$f(x) = x^7 - x^3 + 1 > x > M, \text{ kun } x > K \quad \square$$

Osoitetaan vielä, että $f(x) \to -\infty$, kun $x \to -\infty$. Voimme olettaa, että $x < -1$. Tällöin pätee myös $-1 > x = -(-x) > -(x \cdot x) = -x^2 > x^3 > -x^4$, joten saamme arviot $x^3 < -1$, $-x^4 < x$ ja $-x^4 < -1 \Leftrightarrow x^4 - 1 > 0$, nyt

$$f(x) = x^7 - x^3 + 1 = x^3(x^4 - 1) + 1 < -(x^4 - 1) + 1 = -x^4 + 2 < x + 2$$

Olk. $m \in \mathbb{R}$. Valitaan siis $K = \min\{-1, m - 2\}$. Nyt, kun $x < K$,

$$f(x) = x^7 - x^3 + 1 < x + 2 < m - 2 + 2 = m \quad \square$$

Keksitkö jotain muuta tapaa arvioida funktiota f?

K2

Olk. $f(x) = x^7 - x^3 + 1$. K1:n perusteella on olemassa K_1, K_2 s.e.

$$f(x) < 2013, \text{ kun } x < K_1 \text{ ja } f(x) > 2013, \text{ kun } x > K_2.$$

Olk. nyt $a < K_1$ ja $b > K_2$. Tällöin

$$f(a) < 2013 < f(b).$$

Koska f on polynomina jatkuva, Bolzanon lauseen korollaarin perusteella f saa kaikki arvot väliltä $(f(a), f(b))$. Koska $2013 \in (f(a), f(b))$, on olemassa $c \in (a, b)$ s.e.

$$f(c) = c^7 - c^3 + 1 = 2013. \square$$

Piirrä kuva tilanteesta!

K3:

Oletetaan, että $f(x) \to a$, kun $x \to x_0$, $a \neq 0$.

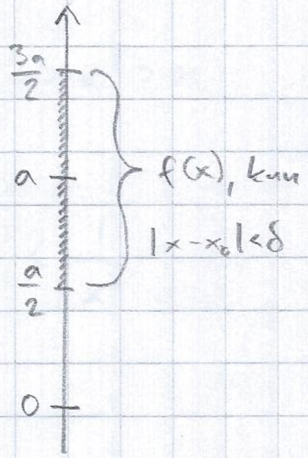
On osoitettava, että on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikille x pätee:

jos $0 < |x - x_0| < \delta$, niin $|f(x)| > \frac{|a|}{2}$.

Tutkitaan tapaukset $a > 0$ ja $a < 0$ erikseen.

Ol. että $a > 0$. Olkoon $\varepsilon = \frac{|a|}{2} = \frac{a}{2}$. Nyt raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f - a| < \frac{a}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < \delta$$



Itseisarvolemman perusteella

$$|f(x) - a| < \frac{a}{2} \iff -\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow a - \frac{a}{2} < f(x)$$

$$\iff \frac{a}{2} < f(x)$$

Koska $a > 0$, niin $0 < \frac{a}{2} = \frac{|a|}{2} < f(x) = |f(x)|$.

Oletetaan nyt, että $a < 0$. Olkoon $\varepsilon = \frac{|a|}{2} = -\frac{a}{2}$. Raja-arvon määritelmän perusteella on olemassa $\delta > 0$ s.e.

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2}, \text{ kun } |x - x_0| < \delta$$

Itseisarvolemman nojalla

$$|f(x) - a| < -\frac{a}{2} \iff \frac{a}{2} < f(x) - a < -\frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) < \frac{a}{2} \iff -f(x) > -\frac{a}{2}$$

Koska $a < 0$, niin $0 < -\frac{a}{2} = \frac{|a|}{2} < -f(x) = |f(x)|$