Analyysi I, kurssikoe 2, 12.12.2013

Ratkaisut (MK)

(1.) Kurssimonisteen lauseen 3.1.10 perusteella

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim_{x\to 2}(x^2+1)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} x^2 - \lim_{x\to 2} 1}{\lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} 1}$$

$$= \frac{2^2-1}{2^2+1} = \frac{4-1}{4+1} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}.$$

Huomaa, että nimittäjän raja-arvo $\neq 0$, kun $x \to 2$.

2. Väite: $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = 7.$

Tod. Olkoon $\varepsilon > 0$. Kun
$0 < |x-2| < \varepsilon \; (= \delta)$, niin

$$\left| \frac{x^2+3x-10}{x-2} - 7 \right| = \left| \frac{x^2+3x-10-(7x-14)}{x-2} \right|$$

$$= \left| \frac{x^2-4x+4}{x-2} \right| = \left| \frac{(x-2)^2}{x-2} \right|$$

$$= |x-2| < \varepsilon,$$

joten $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = 7.$ $\square$

③ Väite! Kaikilla $x \geq 0$ pätee

$$e^x \geq x+1.$$

Tod. Koska $e^0 = 1 = 0+1$, niin väite pätee arvolla $x=0$. Olkoon sitten $x>0$. Koska eksponenttifunktio $f(x)=e^x$ on jatkuva välillä $[0,x]$ ja derivoituva välillä $(0,x)$, niin väliarvolauseen mukaan on olemassa piste $\xi \in (0,x)$, jolle

$$e^\xi = f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^x - e^0}{x} = \frac{e^x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow x e^\xi = e^x - 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = x e^\xi + 1.$$

Koska $\xi > 0$, niin $e^\xi > 1$, joten $e^x = xe^\xi + 1 > x+1$. On siis osoitettu, että $e^x \geq x+1$ kaikilla $x \geq 0$. $\square$

4. Ol. $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ on jatkuva, $f(0)>0$, $f(x)\to 0$, kun $x\to -1^+$ ja kun $x\to 1^-$.

Väite: On olemassa $c\in(-1,1)$, jolle kaikilla $x\in(-1,1)$ pätee $f(x)\le f(c)$.

Tod. Koska f on jatkuva, $f(0)>0$ ja $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, niin on olemassa sellaiset pisteet a ja b,

$$-1<a<0<b<1,$$

että $f(x)<f(0)$ kaikilla $x\in(-1,a)$ ja $x\in(b,1)$.

Koska f on jatkuva välillä $(-1,1)$, niin se on jatkuva myös välillä $[a,b]\subset(-1,1)$. Nyt Weierstrassin lauseen perusteella f saavuttaa suurimman arvonsa välillä $[a,b]$, siis on olemassa piste $c \in [a,b]$ siten, että $f(x) \leq f(c)$ kaikilla $x \in [a,b]$. Koska $0 \in [a,b]$ ja $f(x) < f(0)$ kaikilla $x \in (-1,a)$ ja $x \in (b,1)$, niin

$$f(c) \geq f(0) > f(x)$$

kaikilla $x \in (-1,a)$ ja $x \in (b,1)$. Näin ollen $f(x) \leq f(c)$ kaikilla $x \in (-1,1)$. $\square$