MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Ratkaisuehdotukset alkuviikolle 40
Maiju Eerola

O1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2}.$$

Saat käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(1/n)$ raja-arvosta.

Ratkaisu. Lause 1.2.8 sanoo, että kun $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, niin
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (rx_n) = rx$ kaikilla $r \in \mathbb{R}$
(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y$
(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$ kun $y_n \neq 0$, $y \neq 0$

Lisäksi tiedetään, että (5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ ja (6) $\lim\limits_{n\to\infty} a = a$, kun a on vakio. Lähdetään nyt tarkastelemaan lukujonoa.

$$\frac{n^2+n}{n^2+2} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{2}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+2(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}.$$

Tarkastellaan osoittajaa ja nimittäjää erikseen. Kohdan (6) perusteella tiedetään, että $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, ja kohdan (5) perusteella tiedetään, että $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Siten kohdan (1) perusteella tiedetään, että koska 1 ja $\frac{1}{n}$ suppenevat kun $n \to \infty$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \dfrac{1}{n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} 1) + (\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}) = 1 + 0 = 1$.

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, niin kohdan (3) perusteella tiedetään, että $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{1}{n})(\dfrac{1}{n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}) = 0 \cdot 0 = 0$. Kohdan (6) perusteella tiedetään, että

$\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$, joten kohdasta (3) seuraa myös, että $\lim\limits_{n\to\infty} 2(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) = (\lim\limits_{n\to\infty} 2) \cdot (\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = 2 \cdot 0 = 0$. Koska tiedettiin myös, että $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, niin kohdan (1) perusteella $\lim\limits_{n\to\infty} (1+2(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = (\lim\limits_{n\to\infty} 1)+(\lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot(\frac{1}{n})\cdot(\frac{1}{n})) = 1+0 = 1$.

Nyt siis osoittaja ja nimittäjä suppenevat, kun $n \to \infty$, joten kohdan (4) avulla saadaan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+2(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})} \overset{(4)}{=} \dfrac{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})}{\lim_{n\to\infty}(1+2(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}))} = \dfrac{1}{1} = 1$.

O2 Määritä joukon

$$\{\frac{n-1}{n} | n = 1, 2, 3, ...\}$$

supremum ja infimum. Onko joukolla suurinta tai pienintä alkiota?

Ratkaisu. Supremum on joukon pienin yläraja ja infimum suurin alaraja. Tutkitaan joukon alkioita. Kun $n = 1$, niin $\frac{n-1}{n} = 0$ ja kun $n = 2$, niin $\frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}$. Lauseke näyttää saavan suurempia arvoja, kun n kasvaa. Tiedetään kuitenkin, että $n - 1 < n$, joten $\frac{n-1}{n} < 1$ kaikilla $n = 1, 2, 3, ...$ Tämän perusteella näyttäisi siis, että infimum on 0 ja supremum 1. Todistetaan tämä.

Osoitetaan, että 1 on joukon yläraja. $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$, eli 1 on joukon yläraja. Osoitetaan sitten, että 1 on joukon pienin yläraja. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt $1-\varepsilon$ ei ole joukon yläraja, koska kun $n > \frac{1}{\varepsilon}$, niin $\frac{n-1}{n} = 1-\frac{1}{n} \geq 1-\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = 1-\varepsilon$, joten $1-\varepsilon$ ei voi olla joukon yläraja. Siis 1 on joukon pienin yläraja, eli supremum.

Osoitetaan, että 0 on joukon alaraja. $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0$, kun $n = 1, 2, 3, ...$ Siis 0 on joukon alaraja. Osoitetaan sitten, että 0 on joukon suurin alaraja. Olkoon $\varepsilon > 0$. Nyt $0 + \varepsilon = \varepsilon$ ei ole joukon alaraja, koska esimerkiksi kun $n = 1$, niin $\frac{n-1}{n} = 0 < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \varepsilon$, joten ε ei voi olla joukon alaraja. Siis 0 on joukon suurin alaraja, eli infimum.

Siis joukon infimum on 0 ja supremum 1. Tehtään alussa näytettiin, että

0 on joukon alkio, mutta 1 ei. Nyt lauseen 1.3.4 nojalla joukon pienin alkio on 0, mutta joukossa ei ole suurinta alkiota.

K1 Selvitä kurssin lauseiden avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{6n^2+6}.$$

Saat käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(1/n)$ raja-arvosta.

Ratkaisu. $$\frac{2n^2+3n+4}{6n^2+6} = \frac{n^2(2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2})}{n^2(6+\frac{6}{n^2})} = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}{6+\frac{6}{n^2}} = \frac{2+3(\frac{1}{n})+4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}{6+6(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}.$$

Käytetään taas lausetta 1.2.8 ja tietoa, että (5) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ja (6) $\lim_{n\to\infty} a = a$, kun a on vakio. Tarkastellaan osoittajaa ja nimittäjää erikseen.

Koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, niin kohdan (3) perusteella tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) = (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) \cdot (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = 0 \cdot 0 = 0$. Kohdan (6) perusteella tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} 4 = 4$, joten kohdasta (3) seuraa myös, että $\lim_{n\to\infty} 4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) = (\lim_{n\to\infty} 4) \cdot (\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = 4 \cdot 0 = 0$. Kohdan (6) perusteella tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} 3 = 3$, joten kohdasta (3) seuraa myös, että $\lim_{n\to\infty} 3(\frac{1}{n}) = (\lim_{n\to\infty} 3) \cdot (\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n})) = 3 \cdot 0 = 0$. Tällöin kohdan (1) perusteella $\lim_{n\to\infty} (3(\frac{1}{n}) + 4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} 3(\frac{1}{n}) + \lim_{n\to\infty} 4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) = 0 + 0 = 0$. Lisäksi tiedetään kohdan (6) perusteella, että $\lim_{n\to\infty} 2 = 2$, joten kohdan (1) nojalla $\lim_{n\to\infty} (2 + 3(\frac{1}{n}) + 4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = (\lim_{n\to\infty} 2) + (\lim_{n\to\infty} (3(\frac{1}{n}) + 4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}))) = 2 + 0 = 2$.

Samoin, koska $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, niin kohdan (3) perusteella tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) = (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) \cdot (\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}) = 0 \cdot 0 = 0$. Kohdan (6) perusteella tiedetään, että $\lim_{n\to\infty} 6 = 6$, joten kohdasta (3) seuraa myös, että $\lim_{n\to\infty} 6(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}) =$

$(\lim_{n\to\infty} 6) \cdot (\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = 6 \cdot 0 = 0$. Tiedettiin siis kohdan (6) nojalla, että $\lim_{n\to\infty} 6 = 6$, joten nyt kohdasta (1) seuraa, että $\lim_{n\to\infty}(6 + 6(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = (\lim_{n\to\infty} 6) + (\lim_{n\to\infty} 6 \cdot (\frac{1}{n})(\frac{1}{n})) = 6 + 0 = 6$.

Nyt siis osoittaja ja nimittäjä suppenevat, kun $n \to \infty$, joten kohdan (4) avulla saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{6n^2+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+3(\frac{1}{n})+4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})}{6+6(\frac{1}{n})(\frac{1}{n})} \overset{(4)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty}(2+3(\frac{1}{n})+4(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}))}{\lim_{n\to\infty}(6+6(\frac{1}{n})(\frac{1}{n}))} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

K2 Käy läpi (laadi) todistus seuraavalle monisteessa esitetylle lukujonon raja-arvon ominaisuudelle:

Oletetaan, että $x_n \to a$ ja $y_n \to b$ kun $n \to \infty$. Oletetaan lisäksi, että kaikille n pätee $x_n \leq y_n$. Osoita, että tällöin $a \leq b$.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $x_n \to a$ ja $y_n \to b$, niin tiedämme että $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ kun $n > K$ jollakin K. Huomaa, että tässä siis $K = \max\{K_x, K_y\}$.

Epäyhtälöstä $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ seuraa itseisarvolemman nojalla $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < y_n - b < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow b - \frac{\varepsilon}{2} < y_n < \frac{\varepsilon}{2} + b$. Siis $y_n < \frac{\varepsilon}{2} + b$.

Samoin epäyhtälöstä $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ seuraa $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x_n - a < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < \frac{\varepsilon}{2} + a$. Siis $a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n$.

Koska tiedämme, että $x_n \leq y_n$, niin saamme $a - \frac{\varepsilon}{2} < x_n \leq y_n < \frac{\varepsilon}{2} + b$ eli $a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + b \Leftrightarrow a < b + 2\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow a < b + \varepsilon$.

Todistetaan, että tästä seuraa $a \leq b$. Tehdään se vastaoletuksella, eli oletetaan, että $a > b$. Epäyhtälön $a < b + \varepsilon$ pitää päteä kaikilla $\varepsilon > 0$. Nyt kun $a > b$, niin $a - b > 0$, joten voimme valita $\varepsilon = a - b$. Tällöin $a < b + \varepsilon = b + (a - b) = a \Leftrightarrow a < a$, mikä on ristiriita. Siis oletus $a > b$ ei päde, joten $a \leq b$.

K3 Tässä tehtävässä käytetään tulosta: jos nouseva jono on ylhäältä rajoitettu, niin se suppenee.

Oletetaan, että jono (x_n) on nouseva ja jono (y_n) on suppeneva. Oletetaan lisäksi, että kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$. Osoita, että jono (x_n) on suppeneva.

Ratkaisu. Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletetaan että jono (x_n) on nouseva, kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$ ja jono (y_n) suppenee. Merkitään $\lim_{n\to\infty} y_n = b$. Tällöin $|y_n - b| < \varepsilon$ kun $n > K$ jollakin K. Nyt itseisarvolemman avulla saadaan $|y_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < y_n - b < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon$. Saatiin siis että $y_n < b+\varepsilon$. Tämä pätee kaikilla $\varepsilon > 0$, joten voimme valita esimerkiksi $\varepsilon = 1$. Nyt siis $y_n < b + 1$.

Nyt, koska kaikilla n pätee $x_n \leq y_n$, niin $x_n \leq y_n < b + 1 \Rightarrow x_n < b + 1$ kun $n > K$.

Koska (x_n) on nouseva jono, niin kaikilla n pätee $x_{n+1} \geq x_n$, eli $x_m \leq x_n$ aina kun $m < n$. Siis $x_n < b + 1$ kaikilla n. Tällöin (x_n) on siis ylhäältä rajoitettu.

(x_n) on siis nouseva lukujono, joka on ylhäältä rajoitettu. Tällöin lauseen 1.4.2 nojalla se suppenee.