MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Ratkaisuehdotukset loppuviikolle 48
Maiju Eerola

O3 Oletetaan, että $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja että se on derivoituva välillä $(0,1)$. Oletetaan, että kaikilla $x \in (0,1)$ pätee, että $|f'(x)| \leq 3$. Anna esimerkki sellaisesta luvusta $\delta > 0$, että kaikille välille $[0,1]$ kuuluville x ja y pätee: jos $|x-y| < \delta$, niin $|f(x) - f(y)| < 10^{-2013}$.

Ratkaisu. Funktio f on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $(0,1)$. Oletetaan, että x ja y kuuluvat välille $[0,1]$. Nyt f on jatkuva myös välillä $[x,y]$ ja derivoituva välillä (x,y). Voidaan käyttää siis väliarvolausetta. Tällöin on olemassa $\xi \in (x,y)$, jolle $f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Saadaan

$$f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \Leftrightarrow f'(\xi)(y-x) = f(y) - f(x)$$
$$\Rightarrow |f'(\xi)(y-x)| = |f(y)-f(x)| \Leftrightarrow |f'(\xi)||y-x| = |f(y)-f(x)|$$

Olkoon nyt $\delta > 0$ ja $|x-y| < \delta$. Koska $\xi \in (0,1)$, niin $|f'(\xi)| \leq 3$ tehtävän oletusten nojalla. Nyt saadaan

$$|f(y)-f(x)| = |f'(\xi)||y-x| < 3|y-x| < 3\delta$$

Koska halutaan, että $|f(x)-f(y)| < 10^{-2013}$, niin pitää siis olla että $3\delta < 10^{-2013} \Leftrightarrow \delta < \frac{10^{-2013}}{3}$. Arvioidaan esimerkiksi $\frac{10^{-2013}}{3} > \frac{10^{-2013}}{10} = 10^{-2013-1} = 10^{-2014}$. Voidaan siis valita esimerkiksi $\delta = 10^{-2014}$.

O4 Tarkastellaan funktiota $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, jolle pätee $f(0) = 0$ ja

$$f(x) = x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$$

kun $x \neq 0$.

(a) Osoita, että f on derivoituva välillä $(-1, 1)$ ja että $f'(0) = 1$.
(b) Onko derivaattafunktio f' rajoitettu välillä $[-1, 1]$?
(c) Onko derivaattafunktio f' jatkuva välillä $[-1, 1]$?
(d) (Lisäkysymys) Onko f kasvava millään välillä $(-r, r)$, missä $r > 0$?
Tehtävässä saa käyttää koulusta tuttuja derivointisääntöjä.

Ratkaisu. (a) Olkoon $x \in (-1, 1)$. Koska f on paloittain määritelty funktio, jaetaan tarkastelu kahteen osaan; $x = 0$ ja $x \neq 0$.
Kun $x \neq 0$, niin funktion voi derivoida ketjusäännön (lause 5.2.11) ja tulon derivointisäännön (viikko 47 tehtävä 04) avulla. Nyt

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= D(x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2})) = D(x) + D(x^2 \sin(\frac{1}{x^2})) = 1 + (Dx^2)(\sin(\frac{1}{x^2})) + x^2(D(\sin(\frac{1}{x^2}))) \\
&= 1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) + x^2 \cos(\frac{1}{x^2})(D(\frac{1}{x^2})) = 1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) + x^2 \cos(\frac{1}{x^2})(\frac{-2}{x^3}) \\
&= 1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}
\end{aligned}
$$

Tutkitaan sitten derivaatan arvoa kohdassa $x = 0$, eli erotusosamäärän raja-arvoa kohdassa $x = 0$. Muistetaan, että $-1 \leq \sin x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis myös $-1 \leq \sin(\frac{1}{x^2}) \leq 1$. Nyt

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2}) - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2})}{x} \\
&= \lim_{x \to 0} (1 + x \sin(\frac{1}{x^2})) = 1 + 0 = 1.
\end{aligned}
$$

Siis f on derivoituva kaikilla $x \in (-1, 1)$ ja $f'(0) = 1$.

(b) Olkoon $x \in [-1, 1]$. Näytetään, että f' ei ole rajoitettu tekemällä vastaoletuksen: f' on rajoitettu, eli on olemassa jokin $M \in \mathbb{R}$ siten että $1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x} < M$ kaikilla $x \in [-1, 1]$. Tutkitaan tätä epäyhtälöä pisteen $x = 0$ ympäristössä. Tiedämme, että $-1 \leq \sin x \leq 1$ ja $-1 \leq \cos x \leq 1$. Nyt

$$
1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x} < M \Leftrightarrow 1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) < M + \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}
$$

Tutkimme epäyhtälöä pisteen $x = 0$ ympäristössä, joten pitäisi päteä myös, että $1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) < -\infty$, mikä ei selvästikään päde, sillä $1 + 2x \sin(\frac{1}{x^2}) \in \mathbb{R}$.

Päädyttiin siis ristiriitaan. Siis derivaattafunktio f' ei ole rajoitettu pisteen $x = 0$ ympäristössä.

(c) Olkoon $x \in [-1, 1]$. Derivaattafunktio f' on jatkuva kun $x \neq 0$, sillä silloin $f'(x) = 1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}$, ja 1 on vakiofunktiona jatkuva $\forall x \in \mathbb{R}, 2x$ on polynomifunktiona jatkuva $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\frac{1}{x^2})$ on jatkuva $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, samoin $2\cos(\frac{1}{x^2})$ on jatkuva $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ja $\frac{1}{x}$ on jatkuva $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Näytetään, että f' ei ole jatkuva kohdassa $x = 0$, eli että $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$. Tiedetään jo, että $f'(0) = 1$. Samoin on näytetty, että raja-arvoa $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ ei ole olemassa, sillä $f'(x)$ ei ole rajoitettu pisteen $x = 0$ ympäristössä. Siis $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) \neq f'(0)$, joten derivaattafunktio f' ei ole jatkuva kohdassa $x = 0$.

(d) Lauseen 5.3.9 nojalla välillä $[a, b]$ jatkuva ja välillä (a, b) derivoituva funktio on välillä $[a, b]$ kasvava, jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in (a, b)$. Funktio $f(x)$ on jatkuva välillä $[-1, 1]$ ja derivoituva välillä $(-1, 1)$. $f'(0) = 1 \geq 0$ ja muualla $f'(x) = 1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}$. Olkoon $r > 0$. Näytetään, että ei ole mitään väliä $(-r, r)$, jossa olisi $f'(x) \geq 0$. Tehdään vastaoletus: on olemassa väli $(-r, r)$, jossa $f'(x) \geq 0$. Koska $f(x)$ on derivoituva välillä $(-1, 1)$, pitää olla $r \leq 1$. Siis $r \in (0, 1]$. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Koska $f'(x) \geq 0$, niin

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) \geq \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}$$

Nyt kuitenkin

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x^2}) \leq 1 \Leftrightarrow -r \leq x\sin(\frac{1}{x^2}) \leq r \Leftrightarrow -2r \leq 2x\sin(\frac{1}{x^2}) \leq 2r$$
$$\Leftrightarrow 1 - 2r \leq 1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) \leq 1 + 2r \leq 1 + 2 * 1 = 3.$$

Siis $1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) \leq 3$. Kuitenkin $-2 \leq \cos(\frac{1}{x^2}) \leq 2$, joten $\frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}$ saa suurempiakin arvoja kuin 3 kun $x \longrightarrow 0$. Siis $1 + 2x\sin(\frac{1}{x^2}) \geq \frac{2\cos(\frac{1}{x^2})}{x}$ ei päde kaikilla $x \in (-r, r)$, joten funktio f ei ole millään välillä $(-r, r)$ kasvava.

K4 Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$. Kannattaa huomata, että $\cos 0 = 1$.

Ratkaisu. Olkoon $f(x) = \cos x$. Nyt huomataan, että $f(0) = \cos 0 = 1$. Tiedetään myös, että f on derivoituva $\forall x \in \mathbb{R}$ (lause 5.2.8) ja $f'(x) = -\sin x$. Lisäksi, koska $-1 \leq \sin x \leq 1$, niin $-1 \leq f'(x) \leq 1$. Koska f on derivoituva kaikilla $x \in \mathbb{R}$, niin se on myös jatkuva kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio on siis myös jatkuva kaikilla väleillä $[x, y]$ ja derivoituva kaikilla väleillä (x, y), missä $x, y \in \mathbb{R}$, joten väliarvolausetta voidaan käyttää kaikille väleille $[x, y]$. Jaetaan tarkastelu kolmeen osaan; $x = 0, x < 0$ ja $x > 0$.

Jos $x = 0$, niin $|\cos x - 1| = |\cos 0 - 1| = |1 - 1| = 0 \leq |x|$, joten väite pätee kun $x = 0$.

Jos $x < 0$, niin väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi_1 \in (x, 0)$, jolle

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{\cos 0 - \cos x}{-x} = \frac{1 - \cos x}{-x}.$$

Koska $-1 \leq f'(x) \leq 1$, niin saadaan että

$$\begin{gathered}
-1 \leq f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1 - \cos x}{-x} \leq 1 \\
\Leftrightarrow \left| \frac{1 - \cos x}{-x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|1 - \cos x|}{|-x|} \leq 1 \\
\Leftrightarrow |1 - \cos x| \leq |x| \Leftrightarrow |-1(-1 + \cos x)| \leq |x| \\
\Leftrightarrow |-1 + \cos x| \leq |x| \Leftrightarrow |\cos x - 1| \leq |x|
\end{gathered}$$

Siis väite pätee kun $x < 0$. Vastaavalla tavalla nähdään, että väite pätee kun $x > 0$;
Jos $x > 0$, niin väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi_2 \in (0, x)$, jolle

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\cos x - \cos 0}{x} = \frac{\cos x - 1}{x}.$$

Koska $-1 \leq f'(x) \leq 1$, niin saadaan että

$$\begin{gathered}
-1 \leq f'(x) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq 1 \\
\Leftrightarrow \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|\cos x - 1|}{|x|} \leq 1 \\
\Leftrightarrow |\cos x - 1| \leq |x|
\end{gathered}$$

Siis väite pätee myös kun $x > 0$. Saatiin siis että kaikilla x pätee $|\cos x - 1| \leq |x|$.

K5 Oletetaan, että $a_1, \ldots, a_n$ ovat reaalilukuja. Millä x:n arvolla neliösumma

$$(x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$$

saa pienimmän arvonsa?

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = (x - a_1)^2 + \ldots + (x - a_n)^2$. Funktio f on nyt polynomifunktiona jatkuva. Korollaarin 5.2.3 nojalla se on myös derivoituva. Nyt lauseen 5.5.1 nojalla funktion $f(x)$ pienin arvo löytyy kohdasta x_0, jos $f'(x_0) = 0$ ja $f'(x) < 0$ kun $x < x_0$ ja $f'(x) > 0$ kun $x > x_0$. Etsitään siis derivaatan nollakohdat. Funktion voi derivoida helposti ketjusäännön (lause 5.2.11) avulla. Funktion derivaatta on $f'(x) = 2(x - a_1) + \ldots + 2(x - a_n)$.

$$\begin{gathered}
f'(x) = 0 \\
\Leftrightarrow 2(x - a_1) + \ldots + 2(x - a_n) = 0 \\
\Leftrightarrow 2[(x - a_1) + \ldots + (x - a_n)] = 0 \\
\Leftrightarrow (x - a_1) + \ldots + (x - a_n) = 0 \\
\Leftrightarrow \underbrace{x + x + \ldots + x}_{\text{n kappaletta}} - a_1 - a_2 - \ldots - a_n = 0 \\
\Leftrightarrow nx - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = 0 \\
\Leftrightarrow nx = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\
\Leftrightarrow x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}
\end{gathered}$$

Derivaatan nollakohta on siis lukujen a_i, jossa $i = 1, .., n$, keskiarvo. Siis kun $x < (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, niin $f'(x) < 0$ ja kun $x > (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)/n$, niin $f'(x) > 0$. Siis funktion f pienin arvo on $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Neliösumma saa siis tässä pisteessä pienimmän arvonsa.

K6 Tarkastellaan funktiota $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, joka on derivoituva välillä $(-1, 1)$. Oletetaan, että derivaattafunktion toispuoleiset raja-arvot

$$A = \lim_{x \to 0-} f'(x) \text{ ja } B = \lim_{x \to 0+} f'(x)$$

ovat olemassa. Osoita, että tällöin pätee

$$f'(0) = A = B.$$

Miksi tulos ei ole ristiriidassa tehtävän O4 tuloksen kanssa?

Ratkaisu. Oletetaan, että derivaattafunktion toispuoleiset raja-arvot

$$A = \lim_{x \to 0-} f'(x) \quad \text{ja} \quad B = \lim_{x \to 0+} f'(x)$$

ovat olemassa. Siis $A, B \in \mathbb{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim_{x \to 0-} f'(x) = A$, niin on olemassa $\delta_1 > 0$ siten että $|f'(x) - A| < \varepsilon$, kun $x \in (-\delta_1, 0)$. Koska f on derivoituva välillä $(-1, 1)$, niin on olemassa $h > 0$ siten, että f on jatkuva välillä $[-1 + h, 0]$ ja derivoituva välillä $(-1 + h, 0)$. Olkoon $x \in (-1 + h, 0)$. Voimme nyt käyttää väliarvolausetta välille $[x, 0]$, koska f on jatkuva välillä $[x, 0]$ ja derivoituva välillä $(x, 0)$. Tällöin siis on olemassa $\xi_1 \in (x, 0)$, jolle

$$\begin{aligned} f'(\xi_1) &= \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} \\ \Leftrightarrow f'(\xi_1) - A &= \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} - A \\ \Rightarrow |f'(\xi_1) - A| &= |\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} - A| \end{aligned}$$

Olkoon $x \in (-\delta_1, 0)$. Nyt, koska $-\delta_1 < x < \xi_1 < 0$, niin

$$\varepsilon > |f'(x) - A| = |f'(\xi_1) - A| = |\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} - A| = |\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - A|$$

Siis $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - A| < \varepsilon$, joten erotusosamäärällä on vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 0$, ja raja-arvo on A.

Samalla tavalla näytetään erotusosamäärän oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 0$; Koska $\lim_{x \to 0+} f'(x) = B$, niin on olemassa $\delta_2 > 0$ siten että $|f'(x) - B| < \varepsilon$, kun $x \in (0, \delta_2)$. Koska f on derivoituva välillä $(-1, 1)$, niin on olemassa $h > 0$ siten, että f on jatkuva välillä $[0, 1 - h]$ ja derivoituva välillä $(0, 1 - h)$. Olkoon $x \in (0, 1 - h)$. Voimme nyt käyttää väliarvolausetta välille $[0, x]$, koska f on jatkuva välillä $[0, x]$ ja derivoituva välillä $(0, x)$. Tällöin siis on olemassa $\xi_2 \in (0, x)$, jolle

$$\begin{aligned} f'(\xi_2) &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ \Leftrightarrow f'(\xi_2) - B &= \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - B \\ \Rightarrow |f'(\xi_2) - B| &= |\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - B| \end{aligned}$$

Olkoon $x \in (0, \delta_2)$. Nyt, koska $0 < \xi_2 < x < \delta_2$, niin

$$\varepsilon > |f'(x) - B| = |f'(\xi_2) - B| = |\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - B|$$

Siis $|\frac{f(x)-f(0)}{x-0} - B| < \varepsilon$, joten erotusosamäärällä on oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä $x = 0$, ja raja-arvo on B.

Koska funktio f on oletuksen nojalla derivoituva välillä $(-1, 1)$, niin sen pitää olla siis derivoituva myös pisteessä $x = 0$, eli sen pitää olla sekä vasemmalta että oikealta derivoituva pisteessä $x = 0$ (lause 5.1.8). Siis erotusosamäärän toispuoleisten raja-arvojen pitää olla yhtä suuret pisteessä $x = 0$. Siis pitää olla $f'(0) = A = B$.

Tehtävässä O4 tarkasteltiin myös funktiota $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$, joka oli derivoituva välillä $(-1, 1)$, ja $f'(0) = 1$. Ei kuitenkaan pätenyt $f'(0) = \lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$. Tämä johtuu siitä, että derivaattafunktion toispuoleisia raja-arvoja $A = \lim_{x\to 0-} f'(x)$ ja $B = \lim_{x\to 0+} f'(x)$ ei ollut olemassa, eli derivaattafunktio ei ollut jatkuva pisteessä $x = 0$.