MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Ratkaisuehdotukset loppuviikolle 49
Janne Leppä-aho

O3 Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä (1,2). Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 3 \text{ ja että } \lim_{x\to 2-} f(x) = \infty.$$

Osoita, että on olemassa $a \in]1,2[$, jolle pätee $f(a) = 7$.

Ratkaisu: Haluaisimme soveltaa funktioomme Bolzanoa(tai jos tarkkoja ollaan, sen korollaaria), mutta emme voi käyttää sitä suoraan, sillä funktiomme f on määritelty jatkuvaksi avoimella välillä $(1, 2)$. Bolzanon oletuksissa tarvitaan jatkuvuus suljetulla välillä. Käytetään annettuja raja-arvotietoja sopivan suljetun välin löytämiseksi.

Tiedetään, että $\lim_{x\to 1+} f(x) = 3$. Määritelmää käyttäen voimme siis löytää luvun $\delta_1 > 0$ siten, että $|f(x) - 3| < 1$, kun $1 < x < 1 + \delta_1$. Erityisesti $f(x) < 4$, aina kun $1 < x < 1+\delta_1$. Valitaan mikä tahansa piste $x_1 \in (1, 1+\delta_1)$. Tälle pisteelle pätee siis $f(x_1) < 4$.

Käytetään seuraavaksi tietoa $\lim_{x\to 2-} f(x) = \infty$ löytääksemme pisteen, jossa f saa lukua 7 isomman arvon. Käyttämällä raja-arvon määritelmää, voimme löytää luvun δ_2 siten, että $f(x) > 8$, kun $2 - \delta_2 < x < 2$. Valitaan mikä tahansa piste $x_2 \in (2 - \delta_2, 2)$. Nyt siis $f(x_2) > 8$.

Sovelletaan seuraavaksi Bolzanoa välillä $[x_1, x_2]$. Koska f on tällä välillä jatkuva ja $f(x_1) < 4$ sekä $f(x_2) > 8$, niin on olemassa $a \in (x_1, x_2)$, jolle $f(a) = 7$.

O4 Määritellään $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Osoita, että kaikilla $x \geq 0$ pätee

$$\sinh(x) - \sin(x) \geq 0.$$

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = \sinh x - \sin x$. Huomataan, että f on derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä, sillä se on summa derivoituvista funktioista. Meidän täytyy osoittaa, että $f(x) \geq 0$, kaikilla $x \geq 0$.

Koska $f(0) = 0$, riittää näyttää että f on kasvava kaikilla $x \geq 0$. Tätä varten derivoidaan f:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - \cos x = \cosh x - \cos x.$$

Koska kaikilla x pätee, että $\cosh x \geq 1$ ja $-1 \leq \cos x \leq 1$, niin saadaan

$$f'(x) \geq 1 - 1 = 0,$$

kun $x \geq 0$. Yhtäsuuruus pätee vain, kun $x = 0$, mikä tarkoittaa, että f on vieläpä aidosti kasvava välillä $[0, \infty)$. Eli $f(x) \geq f(0) = 0$, kaikilla $x \geq 0$, mikä pitikin osoittaa.

Ratkaisussa käytettiin tietoa $\cosh x \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Todistetaan tämä väite. Merkitään $g(x) = \cosh x$. Funktio g on derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä, ja derivoimalla saadaan $g'(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Lasketaan derivaatan nollakohdat:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = 0.$$

Huomataan, että $g'(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $g'(x) > 0$, kun $x > 0$. Tällöin käyttämällä kurssin lausetta 5.5.1. voidaan todeta, että g saa pisteessä $x = 0$ pienimmän arvonsa. Eli kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $g(x) \geq g(0) = 1$.

K4 Tarkastellaan funktioita $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, missä kaikilla x asetetaan

$$f(x) = x + \sin x$$

ja

$$g(x) = x/2 + \sin x.$$

Selvitä niiden lokaalit ääriarvot

Ratkaisu: Tutkitaan ensin funktiota $f(x) = x + \sin x$. Luentomonisteen sivulla 95 mainitaan että, jos funktio on derivoituva, niin tällöin lokaaleissa ääriarvokohdissa derivaatta on nolla. Eli kääntäen, jos funktio on derivoituva ja derivaatta ei ole nolla, ei tässä kohdassa voi olla lokaalia ääriarvoa. Toisaalta kaikki derivaatan nollakohdat eivät välttämättä ole lokaaleja ääriarvoja.

Koska f on määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä ja on kaikkialla derivoituva, niin löydämme kaikki mahdolliset ehdokkaat lokaaleiksi ääriarvoiksi derivaatan nollakohdista. Etsitään siis derivaatan nollakohdat:

$$f'(x) = 1 + \cos x,$$

joten

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,$$

$n \in \mathbb{Z}$. Huomataan lisäksi, että $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$ kaikilla x ja yhtäsuuruus pätee vain erillisissä pisteissä. Tämä tarkoittaa, että f on aidosti kasvava koko $\mathbb{R}$:ssä (seuraus lauseesta 5.3.10.). Aidosti kasvavuus kaikkialla tarkoittaa, että mikään löydetyistä pisteistä ei voi olla lokaali ääriarvo.

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota $g(x) = x/2 + \sin x$. Tämäkin funktio on koko $\mathbb{R}$:ssä derivoituva, joten etsitään derivaatan nollakohdat.

$$g'(x) = \frac{1}{2} + \cos x.$$

Nyt

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \text{ tai } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

$n \in \mathbb{Z}$.

Lasketaan vielä g:n toinen derivaatta. Saadaan $g''(x) = -\sin x$. Nyt koska $g''(2\pi/3 + 2\pi n) = -\sin(2\pi/3 + 2\pi n) = -\sqrt{3}/2 < 0$, niin näissä kohdissa on lokaali maksimi. Kun $g''(-2\pi/3 + 2\pi n) = -\sin(-2\pi/3 + 2\pi n) = \sqrt{3}/2 > 0$. Siispä näissä kohdissa funktiolla on lokaali minimi.

Edellinen päättely perustuu seuraavaan lauseseen, joka löytyy Hurri-Syrjäsen monisteesta sivulta 58:

Lause 1. *Olkoon f määritelty ja derivoituva pisteen x_0 ympäristössä. Olkoon $f'(x_0) = 0$ ja olkoon olemassa $f''(x_0) > 0$, niin x_0 on funktion f lokaali minimikohta. Jos $f''(x_0) < 0$, niin x_0 on funktion f lokaali maksimikohta. Jos $f''(x_0) = 0$, niin tällöin funktion ääriarvoista pisteessä x_0 ei voida sanoa mitään.*

Kuvat tehtävän funktioista löytyvät ratkaisujen lopusta.

K5 Osoita väliarvolauseen avulla, että kaikilla $x > 0$ pätee

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

Piirrä kuva laskimella tms., mikäli mahdollista.

Ratkaisu: Merkitään $f(x) = \cos x + \cosh x$. Nyt meidän pitää osoittaa, että $f(x) > 2$ kaikilla $x > 0$.

Olkoon $x > 0$. Sovelletaan väliarvolausetta välillä $[0, x]$. Funktio f on derivoituva koko $\mathbb{R}$:ssä, joten lauseen oletukset ovat voimassa. Huomataan, että $f(0) = 1 + 1 = 2$. Nyt siis löytyy $\xi \in (0, x)$ siten, että

$$\begin{aligned} & f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) \\ \Leftrightarrow & \cos x + \cosh x - 2 = f'(\xi)x \\ \Leftrightarrow & \cos x + \cosh x - 2 = (\sinh \xi - \sin \xi) \cdot x \end{aligned}$$

Tehtävän **04** nojalla $f'(\xi)$ on aidosti kasvava tutkittavalla välillä ja $f'(0) = 0$, joten $\sinh \xi - \sin \xi > 0$ ja oletuksen nojalla $x > 0$. Siispä $(\sinh \xi + \sin \xi) \cdot x > 0$, kun $x > 0$. Tästä seuraa, että $\cos x + \cosh x - 2 > 0$ eli $\cos x > 2 - \cosh x$, aina kun $x > 0$.
Kuva tehtävän funktioista löytyy ratkaisujen lopusta.

K6 Johda yhtälö

$$D \operatorname{ar} \cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

missä $x > 1$. Kannattaa tutkia Hurri-Syrjäsen monisteen sivuja 84 ja 85.

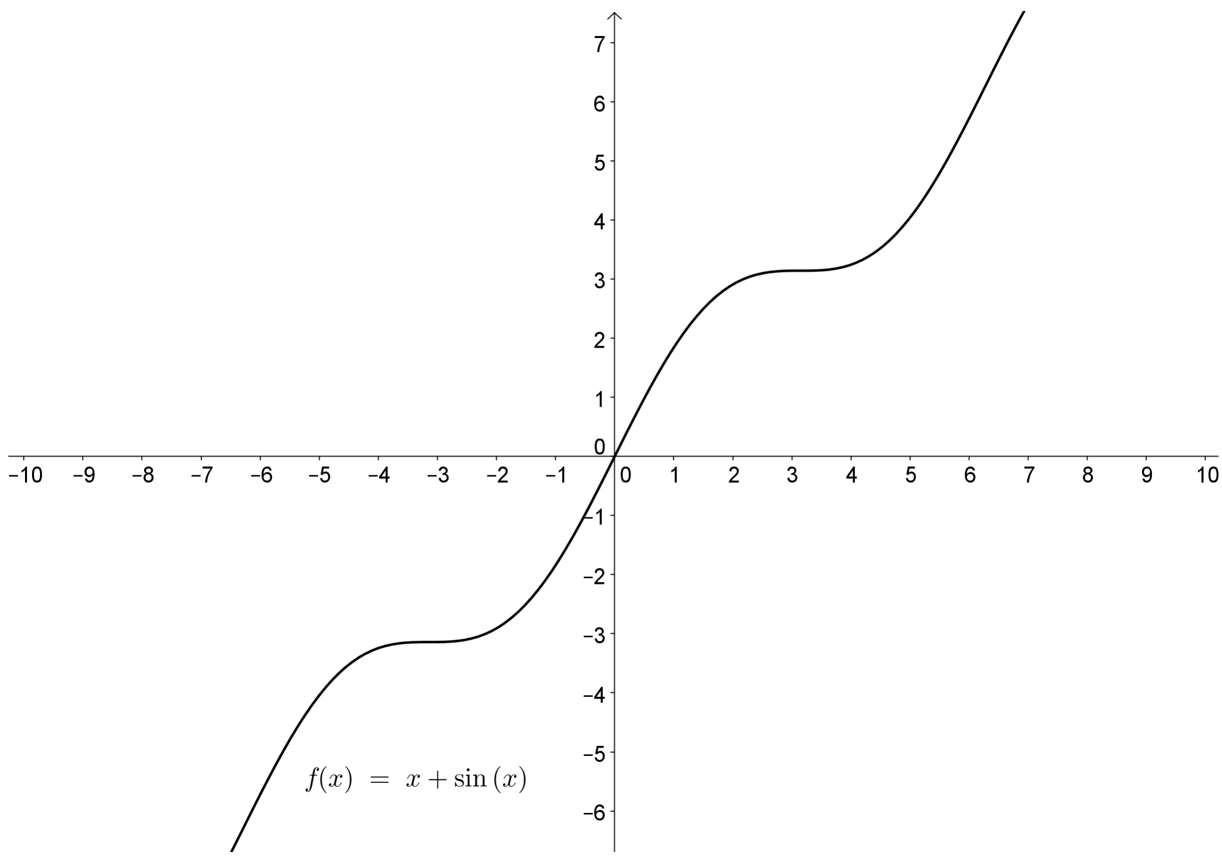
Ratkaisu: Hurri-Syrjäsen monisteen sivulta 84 löytyy kaava, jonka avulla $\operatorname{ar} \cosh x$ voidaan lausua luonnollisen logaritmin avulla:

$$\operatorname{ar} \cosh x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

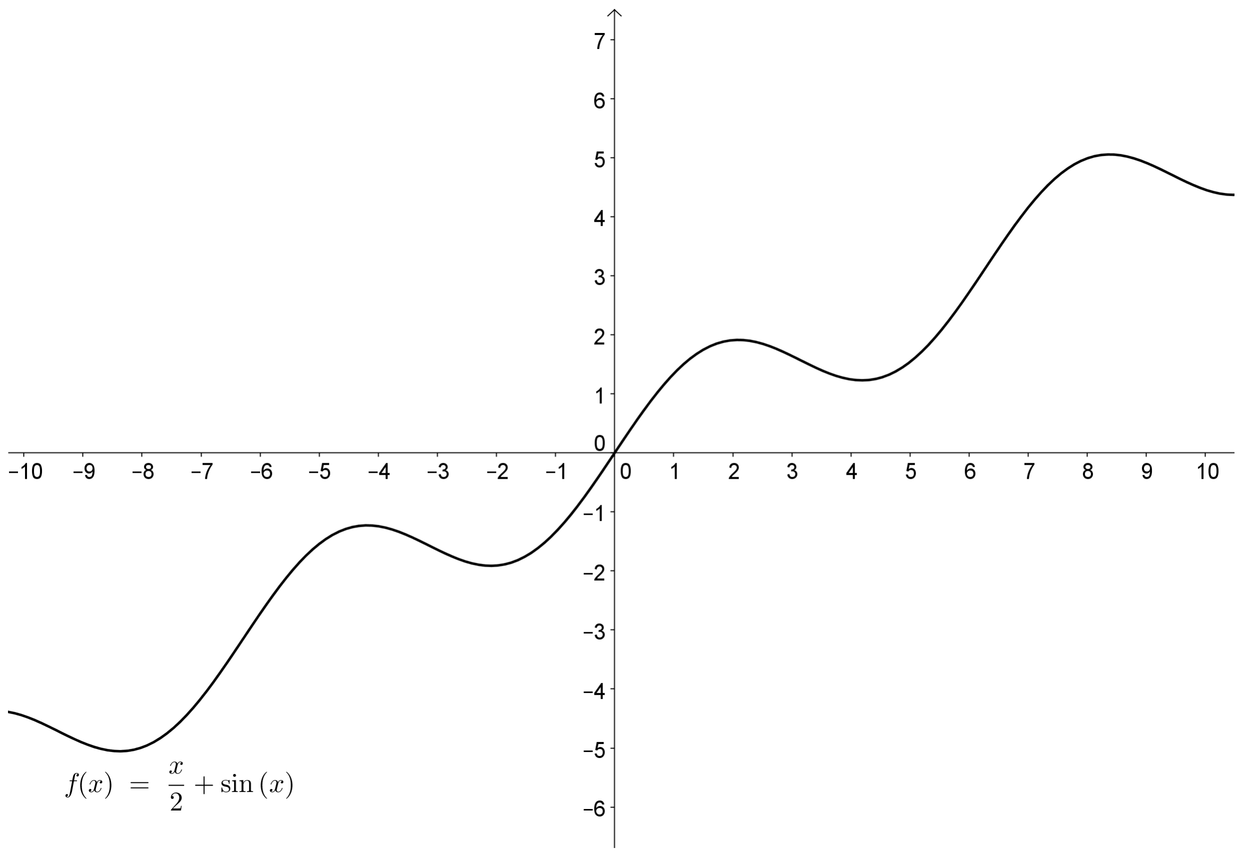
kun $x \geq 1$. Suoraan derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx}\left(\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \\ & = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \end{aligned}$$

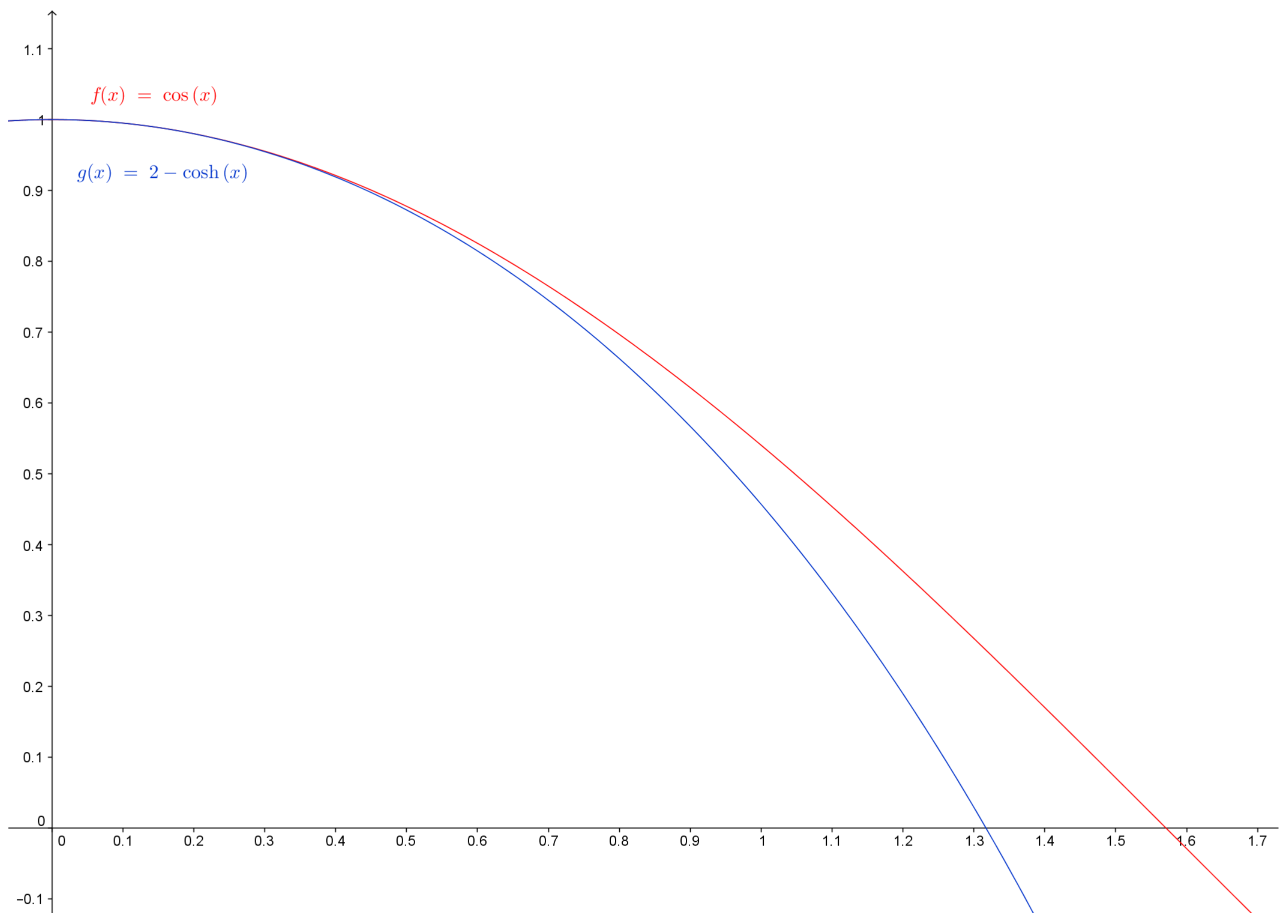
missä $x > 1$.



Kuva 1: Tehtävän 4 funktio



Kuva 2: Tehtävän 4 funktio



Kuva 3: Tehtävän 5 funktiot