Analyysi I, 1. kurssikoe to 17.10.2013 (varsinainen), ratkaisut ja arvostelu (Jouni Luukkainen)
Nämä ratkaisut ovat sekä ilmoitustaululla että kurssin kotisivulla.
Korvaavasta 1. kurssikokeesta 22.10.2013 ei tule erikseen ratkaisuja.

Teht. 1. *Selvitä kurssin tietojen avulla*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7}{5n^2+7}.$$

Tehtävässä saa käyttää tietoa vakiojonon ja jonon $(1/n)$ raja-arvosta sekä lukujonojen raja-arvoa koskevia lauseita. Perustele vastauksesi huolellisesti!

Ratk. Laskemalla, mutta erottelematta eri raja-arvosääntöjä eri vaiheisiin saadaan (**oikea idea 2 p**, **oikea tulos 1 p**):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7}{5n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-7\left(\frac{1}{n}\right)^2}{5+7\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{3-7\cdot 0^2}{5+7\cdot 0^2} = \frac{3}{5}.$$

Esittämällä tämä lasku lukujonojen raja-arvoja koskevia tuloksia vaiheittain käyttäen, vaikkakin niitä erikseen mainitsematta saadaan (nyt mukana myös **perustelut 3 p**)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-7}{5n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{7}{n^2}}{5+\frac{7}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-7\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5+7\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3 - 7\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\lim_{n\to\infty} 5 + 7\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{3-7\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2}{5+7\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{3-7\cdot 0^2}{5+7\cdot 0^2} = \frac{3-0}{5+0} = \frac{3}{5}.$$

Tässä siis mutkikkaampien lausekkeiden raja-arvojen olemassaolo ja suuruus palautettiin aina yksinkertaisempien lausekkeiden raja-arvojen olemassaoloon ja suuruuteen.

Tarvittiin seuraavat tulokset "raja-arvojen aritmetiikasta": Jos (x_n) ja (y_n) ovat suppenevia lukujonoja, $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ ja $r \in \mathbb{R}$, niin lukujonot $(x_n \pm y_n)$, $(x_n y_n)$ ja (rx_n) suppenevat, $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = x \pm y$, $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$ ja $\lim_{n\to\infty} rx_n = rx$; jos pätee lisäksi, että $y_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $y \neq 0$, niin lukujono (x_n/y_n) suppenee ja $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = x/y$. Tarvittiin myös tulokset, että jos $a \in \mathbb{R}$, niin vakiojonolle $(x_n) = (a)$ on $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, ja että $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$.

Esitetään päättely vielä yksinkertaisempien lausekkeiden raja-arvoista mutkikkaampien lausekkeiden raja-arvoihin edeten. Ensiksikin, jos $n \in \mathbb{N}$, niin $5n^2+7 \neq 0$ ja $\dfrac{3n^2-7}{5n^2+7} = \dfrac{3-\frac{7}{n^2}}{5+\frac{7}{n^2}}$ supistamalla n^2:lla. Nyt voidaan päätellä, että $3 \to 3$, $5 \to 5$, $\left(\frac{1}{n}\right)^2 \to 0^2 = 0$ ja siis $\pm\frac{7}{n^2} = \pm 7\left(\frac{1}{n}\right)^2 \to \pm 7\cdot 0 = 0$, kun $n \to \infty$; tämän jälkeen, että $3-\frac{7}{n^2} \to 3+0 = 3$ ja $5+\frac{7}{n^2} \to 5+0 = 5 \neq 0$, kun $n\to\infty$; sekä lopuksi, että $\dfrac{3-\frac{7}{n^2}}{5+\frac{7}{n^2}} \to \dfrac{3}{5}$, kun $n \to \infty$.

Arvostelusta. Keskeinen väite $\lim_{n\to\infty}(1/n^2) = 0$ seuraa myös kuristusperiaatteen nojalla siitä, että $0 \leq 1/n^2 \leq 1/n \to 0$, kun $n \to \infty$. Mutta kokonaan tämän väitteen perustelun ohittaminen saattoi viedä 2 p. Sakkoa 1 p saattoi tulla siitä, että yhdisti eri raja-arvosääntöjä samassa kohdassa.

Teht 2. *Osoita lukujonon raja-arvon määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-1}{n^2} = 1.$$

Ratk. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan (reaalilukujen täydellisyysaksiomaan perustuvan Arkhimedeen lauseen nojalla) sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon \geq 3/\varepsilon$. Tällöin, kun $n > n_\varepsilon$, jolloin $n > 3/\varepsilon$, niin

$$\left|\frac{n^2+3n-1}{n^2} - 1\right| = \left|\frac{n^2+3n-1-n^2}{n^2}\right| = \frac{|3n-1|}{n^2} = \frac{3n-1}{n^2} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Arvostelusta. Määritelmän mukaisten osien "olkoon $\varepsilon > 0$", "valitaan sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, jolla $n_\varepsilon \geq 3/\varepsilon$" ja "kun $n > n_e$" oli kaikkien oltava mukana ja juuri tässä järjestyksessä; kustakin puutteesta sakkoa 1 p. Kuten luennoilla oli kerrottu, siitä, että kynnystä n_ε ei valinnut luonnolliseksi luvuksi, kuten olisi pitänyt, vaan vaikkapa otti $n_\varepsilon = 3/\varepsilon$, ei kuitenkaan sakotettu. Sanontojen epäloogisuuksista kuten "valitaan $\varepsilon > 0$" (ei todistaja itse saa valita!), "olkoon $n_\varepsilon \geq 3/\varepsilon$" (siis muka "kaikille"; mutta onko niitä edes yhtään?) tai "valitaan $n > n_\varepsilon$" (silloinhan voitaisiin valita vaikkapa $n = n_\varepsilon + 1$, eikä se riittäisi!) [yhteensä näissä väärissä sanonnoissa määritelmän kvanttorijono $\forall\exists\forall$ on siis vaihtunut jonoksi $\exists\forall\exists$] ei kuitenkaan sakotettu.

Monen tekemästä väärästä arviosta $\frac{3n-1}{n^2} \leq \frac{3n-n}{n^2} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ (tämähän pätee vain, kun $n = 1$) meni 1 p, sillä jatko ei oleellisesti muuttunut. Jotkut tekivät tämän sijasta sinänsä oikean, mutta hyödyttömän ja väärään suuntaan menneen arvion $\frac{3n-1}{n^2} \geq \frac{3n-n}{n^2} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ ja jatkoivat johdonmukaisesti alaspäin aina vaatimukseen "$> \varepsilon$" asti, mutta silloin ei pisteitä juuri tullut. Liian karkeat arviot tyyliin $\frac{3n-1}{n^2} \leq \frac{3n-1}{n}$, joissa uudella lausekkeella ei ole raja-arvoa 0, kun $n \to \infty$, kaatoivat ratkaisun alkuunsa.

Muutoin pienistä virheistä, kuten aidon epäyhtälön $<$ toteaminen joskus yhtälönä toteutuvan epäaidon epäyhtälön $\leq$ sijasta, ei sakotettu.

Edes mahdollisesti oikein esitetty määritelmä ei korvannut itse todistuksen puutteita.

Teht. 3. *Osoita lukujonon rajatta kasvamisen määritelmän perusteella, että*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-3}{n+5} = \infty.$$

Ratk. Olkoon $M > 0$. Jos $n \geq 2$, niin $3 < 4 \leq n^2$ ja $5 \leq 5n$, joten

$$\frac{2n^2-3}{n+5} \geq \frac{2n^2-n^2}{n+5} = \frac{n^2}{n+5} \geq \frac{n^2}{n+5n} = \frac{n^2}{6n} = \frac{n}{6} > M,$$

kun $n > 6M$. Valitaan sellainen $n_M \in \mathbb{N}$, jolla $n_M \geq 6M$. Tällöin, jos $n > n_M$, jolloin $n \geq 2$ ja $n > 6M$, niin $\frac{2n^2-3}{n+5} > M$.

Yleisesti. Olkoon $x_n = \frac{2n^2-3}{n+5}$, kun $n \in \mathbb{N}$. Etsitään $a, b \in \mathbb{R}$ ja $n_0 \in \mathbb{Z}$, joilla $a > 0$, $n_0 \geq 0$ ja $x_n \geq an + b$ kaikilla $n > n_0$. Tällöin, jos $M > 0$, valitaan sellainen $n_M \in \mathbb{N}$, jolla $n_M \geq \max\{n_0, (M-b)/a\}$, jolloin $x_n \geq an + b > M$ kaikilla $n > n_M$. Yllä olevassa ratkaisussa oli siis $a = 1/6$, $b = 0$ ja $n_0 = 1$.

II tapa. Arvioidaan: $x_n \geq \frac{2n^2-3}{n+5n} = \frac{2n^2-3}{6n} \geq \frac{2n^2-3n}{6n} = \frac{n}{3} - \frac{1}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$; kun $n = 1$, niin $2n^2 - 3 < 0$, mutta ensimmäinen epäyhtälö pätee kuitenkin tällöinkin, nimittäin yhtälönä (aidoksi kirjoitetusta epäyhtälöstä ei kuitenkaan ketään sakotettu). Siis $a = 1/3$, $b = -1/2$, $n_0 = 0$.

III tapa. $x_n \geq \frac{2n^2-3}{6n} \geq \frac{2n^2-n}{6n} = \frac{n}{3} - \frac{1}{6}$, kun $n \geq 3$.

Arvostelusta. Valitettavasti termin "rajatta kasvaminen" olivat jotkut käsittäneet tarkoittavan jonon (monotonista) kasvavuutta: $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, joka nyt pätikin, mutta josta ei seuraa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. On kyllä olemassa laajennettua laskusääntöä $a \cdot \infty = \infty$, kun $a > 0$, vastaava raja-arvotulos, mutta sellaiseen vetoaminen kirjoittamalla esimerkiksi $x_n = na_n$, jossa $a_n = \dfrac{2-3/n^2}{1+5/n} \to 2 > 0$, kun $n \to \infty$, ei tuottanut pisteitä. Tuollainen raja-arvotulos olisi pitänyt todistaa juuri määritelmää käyttämällä!

Väärään suuntaan eli ylöspäin mennyt arvio katkaisi jatkon. Liian karkea arvio kuten esimerkiksi $x_n \ge \dfrac{2n-3}{n+5}$ $(\to 2)$ tai $x_n \ge \dfrac{2n^2-3n^2}{6n} = -\dfrac{n}{6}$ $(\to -\infty)$, jolloin minoranttijono itse ei enää kasva rajatta, ei tietenkään auttanut. Joskus alaspäin kirjoitetut arviot olisivat oikeasti päteneet vain ylöspäin, mutta jos tällöin kuitenkin päätyi arvioon tyyppiä $x_n \ge an + b$ (jollain vakiolla $a > 0$), joka jatkon kannalta oli siis oleellisesti sama kuin oikea arvio, niin jatko arvioitiin normaalisti.

Määritelmän oleellisten kohtien "olkoon $M > 0$", "valitaan $n_M \in \mathbb{N}$" ja "olkoon $n > n_M$" tuli olla mukana. Se, että oli mahdollisesti esittänyt ratkaisun alussa määritelmän, ei riittänyt korvaamaan tällaisen kohdan puuttumista itse todistuksessa. Virheestä, että ei vaatinut $n_M \in \mathbb{N}$, ei sinänsä sakotettu, mutta ilman sitä ei oletuksesta $n > n_M$ ehkä seurannut mahdollisesti tarvittua ehtoa $n \ge 2$, ja tästä puutteesta taas saatettiin sakottaa.

Teht. 4. *Oletetaan, että A epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko reaalilukuja ja että 2 on joukon A pienin yläraja (eli supremum). Osoita, että 6 on joukon*

$$B = \{3x \mid x \in A\}$$

pienin yläraja.

Ratk. Huomataan, että $\sup A$ on todella olemassa, sillä se seuraa viime kädessä täydellisyysaksioman nojalla oletuksesta, että A epätyhjä ylhäältä rajoitettu joukko. Huomataan myös, että $B = \{y \in \mathbb{R} \mid y = 3x \text{ jollain } x \in A\}$.

I tapa. Jos $b \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} b \text{ on joukon } B \text{ yläraja } &\Leftrightarrow\ y \le b \text{ kaikilla } y \in B \ \Leftrightarrow\ 3x \le b \text{ kaikilla } x \in A \\ &\Leftrightarrow\ x \le \frac{b}{3} \text{ kaikilla } x \in A \ \Leftrightarrow\ \frac{b}{3} \text{ on joukon } A \text{ yläraja } \Leftrightarrow 2 \le \frac{b}{3} \Leftrightarrow 6 \le b. \end{aligned}$$

Täten 6 on joukon B pienin yläraja: $\exists \sup B = \min[6, \infty[= 6$.

II tapa. Luku 6 on joukon B yläraja, sillä jos $y \in B$, niin $y = 3x$ jollain $x \in A$, jolloin $x \le 2$ ja siis $y \le 3 \cdot 2 = 6$.

Joukolla B ei ole lukua 6 pienempää ylärajaa, sillä jos $\varepsilon > 0$, niin [selitystä, joka ei ole välttämätöntä: $2 - \varepsilon/3 < 2$, joten $2 - \varepsilon/3$ ei ole A:n yläraja, ja siis] $x > 2 - \varepsilon/3$ jollain $x \in A$, jolloin $y = 3x \in B$ ja $y > 3(2 - \varepsilon/3) = 6 - \varepsilon$ [, minkä vuoksi $6 - \varepsilon$ ei ole B:n yläraja].

Täten 6 on joukon B pienin yläraja.

Jälkimmäisen puolen saattoi todistaa myös seuraavasti: Oletetaan, että B:llä on yläraja $b < 6$. Tällöin $3x \le b$ kaikilla $x \in A$. Siis $x \le b/3$ kaikilla $x \in A$. Täten $b/3$ on A:n yläraja. Ristiriita, sillä $b/3 < 2 = \sup A$.

Arvostelu. Luvun 6 osoittaminen B:n ylärajaksi toi 3 pistettä; samoin sen osoittaminen, että B:llä ei ole lukua 6 pienempää ylärajaa.

Alkuosan pisteet kertyivät tarkemmin seuraavasti: Koska $x \le 2$ kaikilla x (1 p), niin $3x \le 6$ kaikilla $x \in A$ (1 p), joten 6 on joukon B yläraja (1 p). Pelkkä väite, että 6 on B:n yläraja, tuotti 0 p; toisaalta tätä johtopäätöstä ei saanut jättää pois.

Joukko B on siis ylhäältä rajoitettu. Lisäksi B on epätyhjä, sillä koska A on epätyhjä, niin on olemassa alkio $x_0 \in A$, jolloin $3x_0 \in B$. Täten täydellisyysaksioman perusteella on olemassa $\sup B$, ja $\sup B \le 6$. Mutta B:n supremumin olemassaoloa ei tarvinnut erikseen tällä tavalla osoittaa. Pelkästä osoituksesta ei edes tullut pisteitä. Toisaalta ei sakotettu siitä, että ehtoa $B \ne \emptyset$ varten oli väittänyt, että koska $1 < 2 = \sup A$, niin $1 \in A$, tai että $2 = \sup A \in A$; näille väitteillehän on yhteinen vastaesimerkki $A =]1, 2[$.

Moni oli omituisesti sen jälkeen, kun oli jo osoittanut, että 6 on B:n yläraja, ryhtynyt tarpeettomasti osoittamaan, että ei voi olla $\sup B > 6$. **Mistä tällainen sekaannus?**

Väitteen, että mikään luku $b < 6$ ei ole B:n yläraja, oli moni pukenut muotoon, että ei voi päteä $\sup B < 6$, ilman, että oli ensin osoittanut (oikein), että $\sup B$ on olemassa. Tästä ei sinänsä sakotettu, mutta supremumin käyttö jäykisti tietynlaista virheellistä todistusta verrattuna siihen, että lukua b voitaisiin kasvattaa, kunhan oletus $b < 6$ pysyy edelleen voimassa; kyse on siitä, kuinka paljon seuraava virhe vei pisteitä: merkitään $\varepsilon = 6 - b > 0$ tai vastaavasti $\varepsilon = 6 - \sup B > 0$; tällöin luvulle $x = 2 - \varepsilon/6$ muka välttämättä pätisi $x \in A$ (ja siis $3x = 6 - \varepsilon/2 \in B$). Näille väitteillehän $A = \{2\}$ on vastaesimerkki. Mutta ehdon $x = 2 - \varepsilon/6 \in A$ käyttö jollekin $x \in A$ pätevän epäyhtälön $x > 2 - \varepsilon/6$ sijasta ei vienyt kaikkia pisteitä.

Puhuminen pienimpien ylärajojen sijasta joukkojen A tai B suurimmista alkioista saattoi viedä pisteet nollaan, sillä toisaalta näillä joukoilla ei tarvitse olla suurinta alkiota ja toisaalta tehtävä on paljon helpompi, jos A:lla ja B:llä on suurimmat alkiot (ts. jos $2 \in A$ ja $6 \in B$).

Joukkojen A ja B kuvaaminen (kasvavina suppevina) jonoina (tais siis oikeammin tällaisten jonojen kuvajoukkoina) ja lukuja 2 ja 6 näiden jonojen raja-arvoina ei tuottanut pisteitä, ei myöskään supremumin esittäminen jonkinlaisena joukon raja-arvona.