

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013

Uppgifter för vecka 37

Uppgifterna under kursen Analys I kommer att numreras enligt veckonumren och de är uppdelade vidare i uppgifter för början av veckan och uppgifter för slutet av veckan. Till båda delarna hör två handledningsuppgifter och tre hemuppgifter. Ni behöver inte lösa handledningsuppgifterna i förväg. Uppgifterna kan i vissa fall tangera delar från kursmaterialet som inte ännu har behandlats på föreläsningarna. I dessa fall är uppgifterna där för att inleda föreläsningarna.

Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Talets x invers är ett sådant entydigt tal y att $xy = 1$. Varför har inte talet 0 en invers; dvs. varför får man inte dividera med noll?

O2 Anta att n är ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{n+2}{n^2+3} \leq \frac{3}{n}.$$

Tips: använd egenskaperna för storleksordning. Vad händer om man på vänstra sidan ökar på täljaren och minskar på nämnaren?

K1 Visa att $\sqrt[5]{2}$ är irrationellt. Du får följa beviset för att $\sqrt{2}$ är irrationellt som gicks igenom på föreläsningarna.

K2 Är

$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}$$

rationellt eller irrationellt?

K3 Är $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationellt eller irrationellt?

Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Är $\sqrt{3} + \sqrt[3]{3}$ rationellt eller irrationellt?

- O4** (a) Anta att $0 < x < y$. Visa att $x^2 < y^2$.
(b) Anta att $1 < x$. Gäller det att $x^3 < x^7$? Motivera!

K4 Anta att n är ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{5}{4}.$$

K5 Anta att n är ett positivt heltal. Visa att

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2}{9}.$$

K6 (a) Beräkna skillnaden

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}$$

och visa att den är positiv.

(b) Anta att $n > 10^{100}$. Visa att

$$\frac{1}{2} < \frac{2n+3}{4n+5} < \frac{1}{2} + 10^{-100}.$$

Det lönar sig att använda skillnaden som beräknades i (a)-delen.