

# INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys 2013

Uppgifter för vecka 49

Som O-uppgifter finns uppgifterna från 2. kursprovet 2012.

**Uppgifter för början av veckan: O1, O2; K1, K2 och K3**

**O1** Bestäm

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 1}{6x + 1}.$$

Motivera dina påståenden noggrant med hjälp av kursens kunskaper.

**O2** Vi definierar  $f(0) = 0$  och

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

då  $x \neq 0$ . Visa att funktionen  $f$  är deriverbar i punkten  $x = 0$ .

**K1** Derivera  $x^{\frac{3}{5}}$

- (a) med hjälp av den från skolan kända deriveringsregeln för potenser,
- (b) med hjälp av deriveringsreglerna för sammansatta funktioner, den inversa funktionen och heltalspotenser.

**K2** Anta att  $x > 0$  och att  $m$ ,  $n$  och  $p$  är positiva heltalspotenser. Visa på basen av definitionen av roten och räknereglererna för heltalspotenser att

- (a)  $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ ,
- (b)  $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$ .

**K3** Härled logaritmframställningen och deriveringsregeln för den inversa funktionen till funktionen  $\sinh x$ . Undersök sidorna 84 och 85 i kompendiet av Ritva Hurri-Syrjänen. (Kompendiet finns länkat till kursens hemsida.)

**Uppgifter för slutet av veckan: O3, O4; K4, K5 ja K6**

**O3** Anta att funktionen  $f$  är kontinuerlig i intervallet  $(1, 2)$ . Anta dessutom att

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \text{ och att } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty.$$

Visa att det finns  $a \in ]1, 2[$  för vilken gäller att  $f(a) = 7$ .

**O4** Definiera  $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ . Visa att det för alla  $x \geq 0$  gäller att

$$\sinh(x) - \sin(x) \geq 0.$$

**K4** Vi betraktar funktionerna  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  och  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , som för alla  $x$  definieras av

$$f(x) = x + \sin x$$

och

$$g(x) = \frac{x}{2} + \sin x.$$

Bestäm de lokala extremvärdena till  $f$  och  $g$ .

**K5** Visa med hjälp av medelvärdessatsen att för alla  $x > 0$  gäller att

$$\cos x > 2 - \cosh x.$$

Rita en bild med en kalkylator eller liknande, ifall möjligt.

**K6** Härled formeln

$$\text{Dar } \cosh x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

där  $x > 1$ . Det lönar sig att studera sidorna 84 och 85 i kompendiet av Hurri-Syrjänen.