INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys 2013
Uppgifter för vecka 48

Uppgifterna är avsedda som övning. Det lönar sig alltså att fråga tips i god tid!

Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Sök definitionerna för lokala extremvärden från kompendiet. Utred de lokala extremvärdena för funktionen

$$f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 3x + 1.$$

Vad har medelvärdessatsen (och dess följder) att göra med resultatets motivering?

O2 Anta att $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att den är deriverbar i intervallet $(0,1)$.

(a) Anta att det för alla $x \in (0,1)$ gäller att $0 \le f'(x) \le 1$. Vad kan du på basis av detta säga om värdet $f(1)$?

(b) Anta att det för alla $x \in (0,1)$ gäller att $0 \le f'(x) \le x^4$. Vad kan du på basis av detta säga om värdet $f(1)$? För att bestämma övre gränsen lönar det sig att tillämpa medelvärdessatsen på hjälpfunktionen $g(x) = \frac{1}{5}x^5 - f(x)$.

K1 Låt oss undersöka funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = x^3$. Hitta punkten $\xi \in (0,1)$ som nämns i medelvärdessatsen. Vad har resultatet att göra med faktumet att medelvärdessatsen inte skulle kunna vara sann om vi endast hade rationella tal?

K2 Låt oss undersöka den kontinuerliga funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ som för alla $x \in (0,1)$ uppfyller kravet $-2 \le f'(x) \le 1$. Vad kan du på basis av detta säga om värdet $f(1)$ om vi vet att $f(0) = 7$?

K3 Låt oss undersöka den kontinuerliga funktionen $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ som för alla $x \in (0,1)$ uppfyller kravet $-2 \le f'(x) \le 1$. Vad kan du på basis av detta säga om värdet $f(0)$ om vi vet att $f(1) = 7$?

Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Anta att $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig och att den är deriverbar i intervallet $(0,1)$. Anta att det för alla $x \in (0,1)$ gäller att $|f'(x)| \leq 3$. Ge ett exempel på ett sådant tal $\delta > 0$ att följande gäller för alla tal x och y som hör till intervallet $[0,1]$: om $|x-t| < \delta$ så är $|f(x) - f(t)| < 10^{-2013}$.

O4 Låt oss undersöka funktionen $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ för vilket det gäller att $f(0) = 0$ och att

$$f(x) = x + x^2 \sin(\frac{1}{x^2})$$

då $x \neq 0$.

(a) Visa att f är deriverbar i intervallet $(-1,1)$ och att $f'(0) = 1$.

(b) Är derivatafunktionen f' begränsad i intervallet $[-1,1]$?

(c) Är derivatafunktionen f' kontinuerlig i intervallet $[-1,1]$?

(d) (Extra fråga) Är f växande i ett enda intervall $(-r,r)$ där $r > 0$? I uppgiften får man använda deriveringsreglerna från skolan.

K4 Visa genom att använda medelvärdessatsen att det för alla x gäller att $|\cos x - 1| \leq |x|$. Notera att $\cos 0 = 1$.

K5 Anta att $a_1, \ldots, a_n$ är reella tal. För vilket värde av x får summan

$$(x-a_1)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$$

dess minsta värde?

K6 Låt oss undersöka funktionen $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ som är deriverbar i intervallet $(-1,1)$. Anta att derivatafunktionens ensidiga gränsvärden

$$A = \lim_{x \to 0-} f'(x) \quad \text{och} \quad B = \lim_{x \to 0+} f'(x)$$

existerar. Visa att det då gäller att

$$f'(0) = A = B.$$

(Tilläggsfråga att fundera på under räkneövningen) Varför strider resultatet inte emot uppgift O4?