

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013

Uppgifterna för vecka 47

Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Låt oss definiera $f(x) = x^2$. Visa att det för alla h gäller att

$$f(3 + h) = f(3) + 6h + h^2.$$

Hur kan vi direkt från ekvationen deducera värdet för $f'(3)$?

O2 Låt oss undersöka funktionen från föregående uppgift. Uttryck $f(3 + h)$ i formen

$$f(3 + h) = f(3) + 7h + hg(h).$$

Strider resultatet mot kursens satser (speciellt mot lemma 7.1. på sida 47)?

K1 Derivera

(a) $\cos^2(x^5)$;

(b) $\sin^4(\cos^2(x^5))$;

(c) $\sqrt{\sin^4(\cos^2(x^5))}$.

I uppgiften är det meningen att öva på deriveringsregeln för en sammansatt funktion. Alla deriveringsregler från skolan är tillåtna.

K2 Låt oss definiera funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som $f(x) = |x|^3$. För vilka x existerar derivatan $f'(x)$? Hur är det med andra derivatan $f''(x)$? Hur är det med tredje derivatan $f'''(x)$?

K3 Anta att $f'(2) = 3$. Utred

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2 + 4h) - f(2 - h)}{5h}.$$

Det lönar sig att addera och subtrahera $f(2)$ från täljaren.

Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Anta att funktionen f är kontinuerlig i intervallet $[0, 5]$ och deriverbar i intervallet $(0, 5)$. Anta även att för alla $x \in (0, 5)$ gäller det att $-1 < f'(x) < 3$. Vad kan vi på basisen av detta säga om värdet $f(5)$ ifall vi vet att $f(0) = 7$? I uppgiften är det meningen att använda medelvärdessatsen.

O4 Härled deriveringsregeln för produkter från deriverbarhet (lemma 7.1 på sida 47). Undersök alltså ekvationerna

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hu(h)$$

och

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hv(h),$$

där $u(h) \rightarrow 0$ och $v(h) \rightarrow 0$ då $h \rightarrow 0$. Multiplicera ekvationernas högra led med varandra. Vad märker du?

K4 Låt oss definiera funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som $f(x) = \sqrt{x}$ då $x \geq 0$ och som $f(x) = -\sqrt{-x}$ då $x < 0$. I vilka punkter är f deriverbar?

K5 Låt oss undersöka funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = x^4$. Deducera $f'(x)$ med hjälp av lemma 7.1 och ekvationen

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4.$$

K6 Anta att p, q ja r är reella tal och att $p > 0$. Visa att ekvationen

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

har högst två olika reella rötter. Tips: beteckna $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ och tillämpa kursens satser.