INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013
Uppgifterna för vecka 46

I dessa uppgifter används egenskaper hos gränsvärden för funktioner samt egenskaper hos kontinuerliga funktioner som har behandlats på kursen. Kunskaper om derivator får ej användas.

Uppgifter för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Låt oss undersöka funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad som

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + 1}.$$

(a) Visa att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$.
(b) Visa att det existerar ett $c > 0$ för vilket det gäller att $f(c) = 7^{-100}$.

O2 Låt oss undersöka funktionen från förra uppgiften.
(a) Visa att $f(x) \to 0$ då $x \to -\infty$.
(b) Visa att det existerar ett $c \in \mathbb{R}$ för vilket $f(x) \leq f(c)$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}$. Visa alltså att det existerar ett största värde i mängden av alla värden som f får.

K1 Visa genom att använda definitionerna att

$$x^7 - x^3 + 1 \to \infty$$

då $x \to \infty$ och att

$$x^7 - x^3 + 1 \to -\infty$$

då $x \to -\infty$.

K2 Visa med hjälp av Bolzanos sats att det existerar ett $c \in \mathbb{R}$ för vilket det gäller att

$$c^7 - c^3 + 1 = 2013.$$

K3 Anta att $f(x) \to a$ då $x \to x_0$. Anta även att $a \neq 0$. Visa att det existerar ett sådant $\delta > 0$ att det för alla x gäller: om $0 < |x - x_0| < \delta$ så är $|f(x)| > |a|/2$.
Tips: använd värdet $\varepsilon = |a|/2$. Påståendet kan uppfattas som mindre abstrakt om man undersöker fallen $a > 0$ och $a < 0$ skilt.

Uppgifter för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Visa att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = x^5 + x^3$ har en kontinuerlig, strängt växande invers funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

O4 Har funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = \sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x}$ en invers funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

K4 Visa att det existerar ett $c \in \mathbb{R}$ för vilket det gäller att $\sqrt[5]{c} + \sqrt[3]{c} = 42$.

K5 Visa att funktionen $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definierad som $f(x) = x + \sqrt{x}$ har en kontinuerlig, strängt växande invers funktion $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

K6 Anta att en kontinuerlig funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar olikheten $0 \leq f(x) \leq 7$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Låt oss definiera funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^4 + x^2 + 1}.$$

Visa att det bland värden som g får finns ett största värde.