

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013

Uppgifterna för vecka 45

Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Utred

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$$

genom att använda kursens satser.

O2 Visa genom att använda definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 7} = \infty$$

och att

$$\lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x^2 + 1}{x - 7} = \infty.$$

K1 Utred

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

genom att använda kursens satser

K2 Visa genom att använda definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 7} = \frac{1}{4}.$$

K3 Visa genom att använda definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \infty.$$

Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Existerar gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x?$$

I uppgiften får man använda sig av allt det som har lärts ut i skolan om funktionen sinus. Uppgiften blir enklare genom att formulera och bevisa ett passligt hjälpresultat.

O4 Anta att funktionen $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ är växande. Vilka slutsatser kan vi dra ifall vi även vet att f inte är kontinuerlig i punkten $x = 0$?

K4 Visa genom att använda definitionen att

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3}{x - 3} = \infty.$$

K5 Anta att funktionen $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ är växande och att $a < c < b$. Visa att

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

K6 Anta att funktionen $f: (1, 7) \rightarrow \mathbb{R}$ är deriverbar i punkten $x = 2$. Anta även att $f(2) = 3$ och $f'(2) = 4$. Visa att det existerar ett sådant $h > 0$ att för alla $x \in (2, 2 + h)$ så gäller att

$$3 + \left(4 - \frac{1}{5}\right)(x - 2) < f(x) < 3 + \left(4 + \frac{1}{5}\right)(x - 2).$$

(Rita bild!) I uppgiften lönar det sig att tillämpa definitionen av gränsvärdet för en funktion på kunskapen om att

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 4.$$

(Hur vet vi detta?)