INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013
Uppgifterna för vecka 44

Uppgifterna för början av veckan: O1, O2; K1, K2 och K3

O1 (a) Hur definierar du begreppet funktion?

(b) Vilka är de viktigaste sakerna som lärdes ut i gymnasiet om kontinuerliga och deriverbara funktioner? Vilka av dem bevisades i gymnasiet?

(c) Vad vill du lära dig om gränsvärdet för en funktion, kontinuitet och deriverbarhet under denna kurs?

O2 (a) Hur är kontinuiteten och deriverbarheten hos funktioner definierad i gymnasiet?

(b) Följer kontinuitet från deriverbarhet?

(c) Följer deriverbarhet från kontinuitet?

K1 (a) Hitta ett sådant tal $A > 0$ att för alla $x \in (6, 8)$ så gäller det att

$$|x^2 - 49| \leq A|x - 7|.$$

(b) Anta att $\varepsilon > 0$. Visa att det existerar ett sådant tal $\delta > 0$ att för alla $x \in (7 - \delta, 7 + \delta)$ (alltså alltid då $|x - 7| < \delta$,) så gäller att

$$|x^2 - 49| < \varepsilon.$$

K2 (a) Hitta ett sådant tal $A > 0$ att för alla $x \in (1, 3)$ så gäller det att

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| \leq A|x - 2|.$$

(b) Anta att $\varepsilon > 0$. Visa att det existerar ett sådant tal $\delta > 0$ att det för alla $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$ gäller att

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

K3 (a) Hitta ett sådant tal $A > 0$ att för alla $x \in (\frac{1}{8}, \frac{3}{8})$ gäller det att

$$|\sqrt{x} - \frac{1}{2}| \leq A|x - \frac{1}{4}|.$$

(b) Anta att $\varepsilon > 0$. Visa att det existerar ett sådant $\delta > 0$ att det för alla $x \in (\frac{1}{4} - \delta, \frac{1}{4} + \delta)$ gäller att

$$|\sqrt{x} - \frac{1}{2}| < \varepsilon.$$

Uppgifterna för slutet av veckan: O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Visa genom att tillämpa definitionerna för gränsvärdet för en funktion och funktioners kontinuitet att funktionen $f\colon [0,7] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ är kontinuerlig i punkten $x = 4$.

O4 Visa genom att tillämpa definitionerna för gränsvärdet för en funktion och funktioners kontinuitet att funktionen från uppgift O3 är deriverbar i punkten $x = 4$ och att $f'(4) = \frac{1}{4}$.

K4 Visa genom att tillämpa definitionerna för gränsvärdet för en funktion och funktioners kontinuitet att funktionen $f\colon (0,3) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x$ är kontinuerlig i punkten $x = 1$.

K5 Är funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ deriverbar i punkten $x = 0$?

K6 Anta att funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uppgfyller kravet $|f(x)| \leq 3$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Låt oss nu definiera funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som följande:

$$g(x) = x^2 f(x).$$

Visa att funktionen g är deriverbar i punkten $x = 0$. (Frivillig fråga: kan funktionen f väljas på ett sådant sätt att g inte är deriverbar någon annanstans?)