

INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013

Uppgifter för vecka 41

Denna gång avslutar vi behandlandet av gränsvärdet för en talföljd. Nya drag är t.ex. Bernoullis olikhet och exponentuttryck, samt obegränsat växande och avtagande.

Uppgifterna O1-O4 är menade som ett exempel på hur första kursprovet kan se ut. I uppgifterna finns inget om storleksordningar eller absolutbelopp även om såna uppgifter kan finnas i provet. Den mest krävande uppgiften behandlar nu begreppet supremum. Uppgiften kan dock också behandla något annat från provområdet.

Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Utred

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{2n + 1}$$

genom att använda kursens satser. Motivera!

O2 Visa utgående från definitionen att

$$\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1} \rightarrow 1 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

K1 (a) Visa att $5^n \geq 1 + 4n$ då $n = 1, 2, 3, \dots$

(b) Visa att

$$\frac{1}{5^n} \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

K2 Visa att

$$\frac{n^2 + 1}{n + 1} \rightarrow \infty \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

K3 Visa att

$$\frac{1 + n^2}{1 - 2n} \rightarrow -\infty \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Visa utgående från definitionen att

$$\frac{n^2 - 2}{n + 3} \rightarrow \infty \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

O4 Anta att mängderna A och B av reella tal är icke-tomma och uppifrån begränsade. Visa att

$$\sup\{x + y \mid x \in A \text{ och } y \in B\} = \sup A + \sup B.$$

K4 Visa att

$$n^2 - n \rightarrow \infty \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

K5 Utred

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$$

genom att använda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

I uppgiften får man även använda kunskapen om att ifall $x_n \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$, så gäller $\sqrt[3]{x_n} \rightarrow \sqrt[3]{a}$ då $n \rightarrow \infty$. (Hur skulle man kunde gå till väga för att bevisa detta?)

K6 Anta att $x_n \rightarrow \infty$ och $y_n \rightarrow a$ då $n \rightarrow \infty$; här är a ett reellt tal. Gäller det då att $x_n + y_n \rightarrow \infty$ då $n \rightarrow \infty$?