INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

Analys I 2013
Uppgifterna för vecka 40

Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

O1 Utred gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2+2}$$

genom att använda kursens satser. Du får även använda det du vet om gränsvärdet för konstanta följder och följden $(1/n)$.

O2 Bestäm supremum och infimum för mängden

$$\{\frac{n-1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}.$$

Har mängden ett största eller minsta element?

K1 Utred gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+4}{6n^2+6}.$$

genom att använda kursens satser. Du får även använda det du vet om gränsvärdet för konstanta följder och följden $(1/n)$.

K2 Formulera ett bevis för följande egenskap för gränsvärdet för en talföljd som presenteras i kompendiet:
Anta att $x_n \to a$ och $y_n \to b$ då när $n \to \infty$. Anta även att för alla n gäller det att $x_n \leq y_n$. Visa att $a \leq b$.

K3 Lösningen till denna uppgift använder sig av följande resultat: ifall en växande följd är uppifrån begränsar så är följden konvergent.
Anta att följden (x_n) är växande och att följden (y_n) är konvergent. Anta även att för alla n så gäller det att $x_n \leq y_n$. Visa att följden (x_n) är konvergent.

Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

O3 Anta att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ och att $a \neq 0$. Visa att det existerar en tröskel K så att för alla $n > K$ gäller det att

$$|x_n| > \frac{1}{2}|a|.$$

Uppgiften kan lösas t.ex. genom att undersöka skilt fallen $a < 0$ och $a > 0$. Rita bild!

O4 Vad vet du om induktion? Finns det något du undrar eller något du vill veta mera om? Bevisa med induktion att för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$ gäller att

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

K4 Anta att följden (x_n) är konvergent. Visa att

$$\frac{(x_n)^3}{n} \to 0$$

då $n \to \infty$.

K5 Visa på samma vis som på föreläsningarna att det existerar ett reellt tal

$$a = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ och } x^2 < 5\}.$$

Visa dessutom att $a^2 = 5$. (I uppgiften visar man alltså att existensen av $\sqrt{5}$ följer ur reella talens axiom!)

K6 Visa på samma vis som på föreläsningarna att följande talföljd konvergerar och att dess gränsvärde är $\sqrt{5}$:

$$x_1 = 3$$

och

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$$

för alla $n = 1, 2, 3, \ldots$.