

# INSTITUTIONEN FÖR MATEMATIK OCH STATISTIK

## Analys I 2013

### Uppgifter för vecka 38

Nyttigt att komma ihåg:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , och  $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ .

### Uppgifterna för början av veckan O1, O2; K1, K2 och K3

**O1** Vilka tal satisfierar olikheten  $|x - 7| < 3^{17}$ ? Gissa först svaret genom att tolka absolutbeloppet av skillnaden som ett avstånd. Bevisa sedan påståendet genom att använda absolutbeloppets egenskaper ( $|t| < a$  om och endast om  $-a < t < a$ ; här är  $a$  positivt.)

**O2** Vilka tal satisfierar olikheten  $|2x - 8| < 3^{17}$ ?

**K1** Hitta ett sådant tal  $K > 0$  så att för alla tal  $x$  i intervallet  $(1, 3)$  gäller att  $|x^2 - 4| \leq K|x - 2|$ . Det lönar sig att skriva  $x^2 - 4$  som en produkt.

**K2** Hitta ett sådant tal  $K > 0$  så att för alla tal  $x$  i intervallet  $(1, 3)$  gäller att  $|x^3 - 8| \leq K|x - 2|$ . Det lönar sig att skriva  $x^3 - 8$  som en produkt.

**K3** Tänk på skolans avrundningsregler.

(a) Vilket intervall bildas av alla reella tal  $x$  vars närmevärde med två decimalers noggrannhet är 15,15?

(b) Anta att  $|x - e^e| < 2^{-1}10^{-3}$ . Vad vet vi om talets  $x$  decimalutveckling på basen av detta antagande?

(c) Vad om  $|x - e^e| < 2^{-1}10^{-10}$ ?

Decimalutvecklingen för talet  $e^e$  börjar såhär:

15,154262241479264189760430272629911905528548536856.

### Uppgifterna för slutet av veckan O3, O4; K4, K5 och K6

**O3** Anta att  $|x - e| < 9^{-9}$  och att  $|y - \pi| < 9^{-9}$ .

(a) Vad vet du nu om absolutbeloppet  $|(x + y) - (e + \pi)|$ ?

(b) Vad vet du om absolutbeloppet  $|xy - e\pi|$ ? Här lönar det sig att addera och subtrahera  $x\pi$ .

**O4** Anta att  $|x - e| < 9^{-9}$  och att  $|y - \pi| < 9^{-9}$ . Vad vet du nu om absolutbeloppet

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{e}{\pi} \right|?$$

**K4** Bevisa följande genom att använda absolutbeloppets definition:

- (a)  $|x| \geq 0$ ;
- (b)  $|x| = |-x|$ ;
- (c)  $|xy| = |x||y|$ .

**K5** Hitta ett sådant  $r > 0$  att för alla  $x \in (2 - r, 2 + r)$  gäller att  $|x^2 - 4| < 10^{-100}$ . Det lönar sig att använda resultatet från K1.

**K6** Hitta ett sådant  $r > 0$  att för alla  $x \in (2 - r, 2 + r)$  gäller att  $|x^3 - 8| < 10^{-100}$ . Det lönar sig att använda resultatet från K2.