VEKTORIANALYYSI
1. välikoe / exam 1
15.10.2012

1. Muodosta yhdistetyn kuvauksen $h = f \circ g$ lauseke, kun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \cos x_2 - \sin x_1$, sekä $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x+z-y, y-z)$. Laske osittaisderivaatat $\partial_1 h$ ja $\partial_3 h$ (max. 4 pistettä). Onko funktiolla h lokaalia maksimia pisteessä $(\pi, 0, \pi)$? (max. 2 pistettä)?

2. Esitä seuraavien funktioiden toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0, 0)$:

a) $f(x, y) = 1 + x^2 \sin(y + \pi/2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, b) $g(x, y) = \dfrac{1+x}{1-xy}$, $(x, y) \in B(\bar{0}, 1)$.

3. Laske seuraavien kahden muuttujan funktioiden kriittiset pisteet ja tutki, ovatko ne lokaaleja ääriarvopisteitä ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

$$\text{a) } f(x, y) = 1 + x^2 + 2xy - 4y \ , \quad \text{b) } ye^{-3x^2-2y^2}$$

4. Mikä on tehtävän 3 kohdan a) funktion suurin ja pienin arvo kompaktissa joukossa, jota rajoittavat suorat $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$ sekä paraabeli $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

****

1. Write the expression for the composed function $h = f \circ g$, given $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = \cos x_2 - \sin x_1$ and $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (x + z - y, y - z)$. Calculate the partial derivatives $\partial_1 h$ and $\partial_3 h$ (max. 4 points). Does the function h have a local maximum at the point $(\pi, 0, \pi)$? (max. 2 points)?

2. Write the second order Taylor development at $(0, 0)$ for the following functions:

a) $f(x, y) = 1 + x^2 \sin(y + \pi/2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, b) $g(x, y) = \dfrac{1+x}{1-xy}$, $(x, y) \in B(\bar{0}, 1)$.

3. Determine the critical points of the following functions, and find out, if they are local minima or maxima ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$).

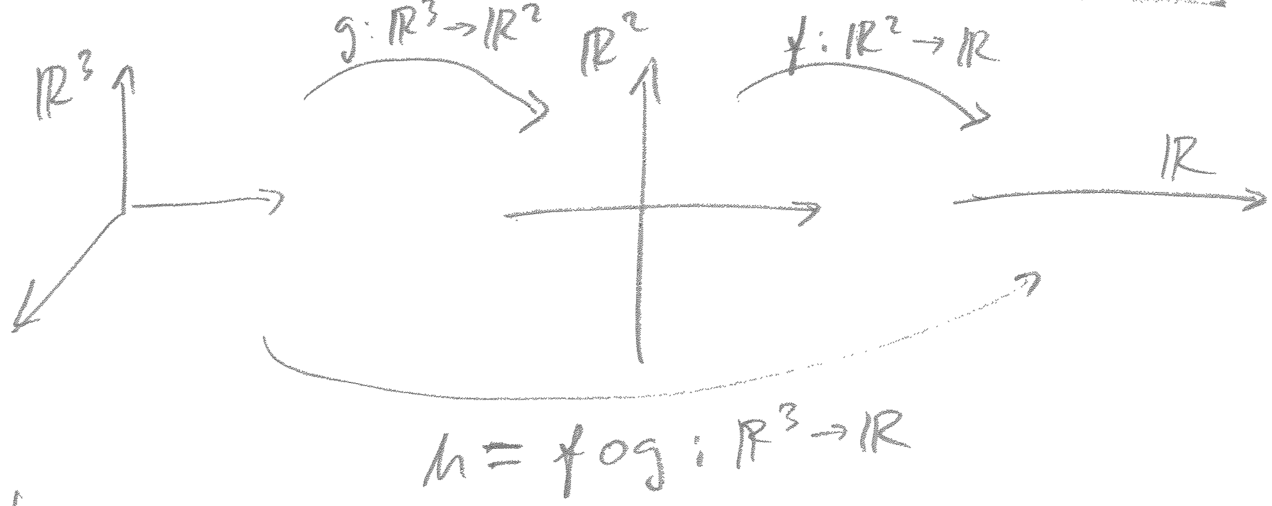
$$\text{a) } f(x, y) = 1 + x^2 + 2xy - 4y \ , \quad \text{b) } ye^{-3x^2-2y^2}$$

4. Find the biggest and smallest value of the function given in the problem 3 a) in the compact set, the boundary of which consists of the lines $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2\}$ and the parabola $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.

Vektorianalyysi, 1. kurssikoe, 15.10.2012

Ratkaisut (MK)

1.



Nyt

$$h(x,y,z) = (f \circ g)(x,y,z) = f(g(x,y,z))$$

$$= \cos(y-z) - \sin(x+z-y).$$

(+2p)

Näin ollen

$$\partial_1 h(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = -\cos(x+y-z)$$

(+1p)

ja

$$\partial_3 h(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)$$

$$= -(-\sin(y-z)) - \cos(x+z-y)$$

$$= \sin(y-z) - \cos(x+z-y)$$

(+1p)

Osittaisderivaatat voidaan laskea myös ketjusäännöllä. Koska

$\partial_1 f(x_1, x_2) = -\cos x_1 \quad , \partial_2 f(x_1, x_2) = -\sin x_2$

$\partial_1 g_1(x,y,z) = 1, \; \partial_2 g_1(x,y,z) = -1, \; \partial_3 g_1(x,y,z) = 1,$

$\partial_1 g_2(x,y,z) = 0, \; \partial_2 g_2(x,y,z) = 1, \; \partial_3 g_2(x,y,z) = -1,$

niin

$$\begin{aligned}\partial_1 h(x,y,z) &= -\cos(x+z-y)\cdot 1 - \sin(y-z)\cdot 0 \\ &= -\cos(x+z-y)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\partial_3 h(x,y,z) &= -\cos(x+z-y)\cdot 1 - \sin(y-z)(-1) \\ &= \sin(y-z) - \cos(x+z-y).\end{aligned}$$

Koska $h \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ja

$\partial_1 h(\pi, 0\pi) = -\cos(\pi+\pi-0) = -\cos 2\pi = -1 \neq 0,$

niin $(\pi, 0, \pi)$ ei ole hin kriittinen piste eikä hillä voi siis olla lokaalia maksimia pisteenä $(\pi, 0, \pi)$. (+2p)

(Voi myös laskea $\nabla h(\pi, 0\pi) = (-1, 1, -1) \neq (0,0,0)$)

(2) (a) Havaitaan, että $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$. Nyt

$$\partial_1 f(x,y) = 2x \sin\left(y + \tfrac{\pi}{2}\right),$$
$$\partial_2 f(x,y) = x^2 \cos\left(y + \tfrac{\pi}{2}\right),$$
$$\partial_{11} f(x,y) = 2 \sin\left(y + \tfrac{\pi}{2}\right),$$
$$\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 2x \cos\left(y + \tfrac{\pi}{2}\right),$$
$$\partial_{22} f(x,y) = -x^2 \sin\left(y + \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad (+1p)$$

joten

$$f(0,0) = 1 + 0^2 \cdot \sin\left(0 + \tfrac{\pi}{2}\right) = 1,$$
$$\partial_1 f(0,0) = 2 \cdot 0 \cdot \sin\left(0 + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\partial_2 f(0,0) = 0^2 \cdot \cos\left(0 + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\partial_{11} f(0,0) = 2 \cdot \sin\left(0 + \tfrac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \sin\tfrac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2,$$
$$\partial_{12} f(0,0) = \partial_{21} f(0,0) = 2 \cdot 0 \cdot \cos\left(0 + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0,$$
$$\partial_{22} f(0,0) = -0^2 \cdot \sin\left(0 + \tfrac{\pi}{2}\right) = 0. \qquad (+1p)$$

Näin ollen f:n toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0,0)$ on

$$f(h,k) = 1 + 0\cdot h + 0\cdot k$$
$$+ \frac{1}{2}\left(2\cdot h^2 + 2\cdot 0\cdot hk + 0\cdot k^2\right)$$
$$+ \left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}} B(h,k)$$
$$= 1 + h^2 + \left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}} B(h,k),$$

missä $B(h,k)$ on rajoitettu funktio jossakin pallossa $B(0,r)$, $r>0$. (+1p)

(b) Havaitaan jälleen, että $g \in C^3(B(\bar{0},1))$.

Nyt

$$\partial_1 g(x,y) = \frac{1(1-xy)-(1+x)(-y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y}{(1-xy)^2},$$

$$\partial_2 g(x,y) = \frac{0\cdot(1-xy)-(1+x)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{x+x^2}{(1-xy)^2},$$

$$\partial_{11} g(x,y) = \frac{0\cdot(1-xy)^2-(1+y)\cdot 2\cdot(1-xy)(-y)}{(1-xy)^4}$$
$$= \frac{2y(1+y)(1-xy)}{(1-xy)^4},$$

$$\partial_{12} g(x,y) = \partial_{21} g(x,y)$$
$$= \frac{1\cdot(1-xy)^2 - (1+y)\cdot 2\cdot(1-xy)(-x)}{(1-xy)^4}$$
$$= \frac{(1+2x+xy)(1-xy)}{(1-xy)^4},$$
$$\partial_{22} g(x,y) = \frac{0\cdot(1-xy)^2 - (x+x^2)\cdot 2\cdot(1-xy)(-x)}{(1-xy)^4}$$
$$= \frac{2x(x+x^2)(1-xy)}{(1-xy)^4}, \quad (+1p)$$

jolloin

$$g(0,0) = \frac{1+0}{1-0\cdot 0} = \frac{1}{1} = 1,$$
$$\partial_1 g(0,0) = \frac{1+0}{(1-0\cdot 0)^2} = \frac{1}{1^2} = 1,$$
$$\partial_2 g(0,0) = \frac{0+0^2}{(1-0\cdot 0)^2} = 0,$$
$$\partial_{11} g(0,0) = \frac{2\cdot 0\cdot(1+0)(1-0\cdot 0)}{(1-0\cdot 0)^4} = 0,$$
$$\partial_{12} g(0,0) = \partial_{21} g(0,0) = \frac{(1+2\cdot 0+0\cdot 0)(1-0\cdot 0)}{(1-0\cdot 0)^4}$$
$$= \frac{1\cdot 1}{1^4} = 1,$$

$$\partial_{22} g(0,0) = \frac{2 \cdot 0 \cdot (0+0^2)(1-0\cdot 0)}{(1-0\cdot 0)^4} = 0, \quad (+1p)$$

Näin ollen g:n toisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä $(0,0)$ on

$$\begin{aligned} g(h,k) &= 1 + 1\cdot h + 0\cdot k \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(0\cdot h^2 + 2\cdot 1\cdot hk + 0\cdot k^2) \\ &\quad + (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}} B(h,k) \\ &= 1 + h + hk + (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}} B(h,k), \end{aligned}$$

missä $B(h,k)$ on rajoitettu funktio jossakin pallossa $B(0,r)$, $r>0$. $(+1p)$

(3.) (a) Havaitaan, että $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Nyt

$\partial_1 f(x,y) = 2x + 2y$ ja $\partial_2 f(x,y) = 2x - 4$,

joten

$$\nabla f(x,y) = (2x+2y, 2x-4) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2y = 0 \\ 2x-4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Näin ollen f:n ainoa kriittinen piste on $(2,-2)$. (+1 p)

Tutkitaan sitten, että onko $(2,-2)$ f:n lokaali ääriarvopiste. Nyt

$$\partial_{11} f(x,y) = 2,$$
$$\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 2,$$
$$\partial_{22} f(x,y) = 0$$

joten

$$a = \partial_{11} f(2,-2) = 0,$$
$$b = \partial_{12} f(2,-2) = \partial_{21} f(2,-2) = 2$$

ja $c = \partial_{22} f(2,-2) = 0$,

joten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 2\cdot 2 = -4 < 0 \,.$$

(+1p)

Näin ollen neliömuoto

$$Q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2$$
$$= 2h^2 + 2\cdot 2\cdot hk + 0\cdot k^2$$
$$= 2h^2 + 4hk$$

on indefiniitti ja $(2,-2)$ ei ole ääriarvokohta (vaan ns. satulapiste). (+1p)

(b) Merk. $g(x,y) = ye^{-3x^2-2y^2}$, jolloin $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Nyt

$$\partial_1 g(x,y) = y\cdot(-6x)e^{-3x^2-2y^2} + 0\cdot e^{-3x^2-2y^2}$$
$$= -6xye^{-3x^2-2y^2}$$

ja

$$\partial_2 g(x,y) = y\cdot(-4y)e^{-3x^2-2y^2} + 1\cdot e^{-3x^2-2y^2}$$
$$= (-4y+1)e^{-3x^2-2y^2},$$

joten

$$\nabla g(x,y) = \left(-6xye^{-3x^2-2y^2}, (-4y^2+1)e^{-3x^2-2y^2}\right)$$
$$= (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6xy = 0 \\ -4y^2+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6xy = 0 \\ 4y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6xy = 0 \\ y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Näin ollen g:n kriittiset pisteet ovat $(0,-\frac{1}{2})$ ja $(0,\frac{1}{2})$. (+1p)

Tutkitaan sitten, ovatko $(0,-\frac{1}{2})$ ja $(0,\frac{1}{2})$ lokaaleja ääriarvopisteitä. Nyt

$$\partial_{11} g(x,y) = -6xy(-6x)e^{-3x^2-2y^2} - 6ye^{-3x^2-2y^2}$$
$$= (6x^2-1)6ye^{-3x^2-2y^2},$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{12} g(x,y) = \partial_{21} g(x,y) &= -6xy(-4y)e^{-3x^2-2y^2} - 6xe^{-3x^2-2y^2} \\
&= (4y^2-1)\,6xe^{-3x^2-2y^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_{22} g(x,y) &= (-4y^2+1)(-4y)\,e^{-3x^2-2y^2} \\
&\quad - 8ye^{-3x^2-2y^2} \\
&= (4y^2-3)\,4ye^{-3x^2-2y^2}.
\end{aligned}
$$

Tutkitaan ensin piste $(0, -\frac{1}{2})$:

$$
\begin{aligned}
a = \partial_{11} g(0, -\tfrac{1}{2}) &= (6\cdot 0^2 - 1)\cdot 6(-\tfrac{1}{2})\,e^{-3\cdot 0^2 - 2(-\frac{1}{2})^2} \\
&= 3e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b = \partial_{12} g(0, -\tfrac{1}{2}) &= \partial_{21} g(0, -\tfrac{1}{2}) \\
&= (4(-\tfrac{1}{2})^2 - 1)\cdot 6\cdot 0\cdot e^{-3\cdot 0^2 - 2(-\frac{1}{2})^2} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c = \partial_{22} g(0, -\tfrac{1}{2}) &= (4(-\tfrac{1}{2})^2 - 3)\cdot 4(-\tfrac{1}{2})\,e^{-3\cdot 0^2 - 2(-\frac{1}{2})^2} \\
&= 4e^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

joten

$$
\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 4e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 12(e^{-\frac{1}{2}})^2 = \frac{12}{e} > 0.
$$

Koska lisäksi $a = 3e^{-\frac{1}{2}} > 0$, niin Q on positiivisesti definiitti ja näin ollen $(0, -\frac{1}{2})$ on aito lokaali minimikohta. $(+1p)$

Tutkitaan sitten pistettä $(0, \frac{1}{2})$:

$$a = \partial_{11} g(0, \tfrac{1}{2}) = (6 \cdot 0^2 - 1) 6 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e^{-3 \cdot 0^2 - 2(\frac{1}{2})^2}$$
$$= -3e^{-\frac{1}{2}},$$

$$b = \partial_{12} g(0, \tfrac{1}{2}) = \partial_{21} g(0, \tfrac{1}{2})$$
$$= (4 \cdot (-\tfrac{1}{2})^2 - 1) \cdot 6 \cdot 0 \cdot e^{-3 \cdot 0^2 - 2(\frac{1}{2})^2} = 0,$$

$$c = \partial_{22} g(0, \tfrac{1}{2}) = (4(\tfrac{1}{2})^2 - 3) \cdot 4 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot e^{-3 \cdot 0^2 - 2(\frac{1}{2})^2}$$
$$= -4e^{-\frac{1}{2}},$$

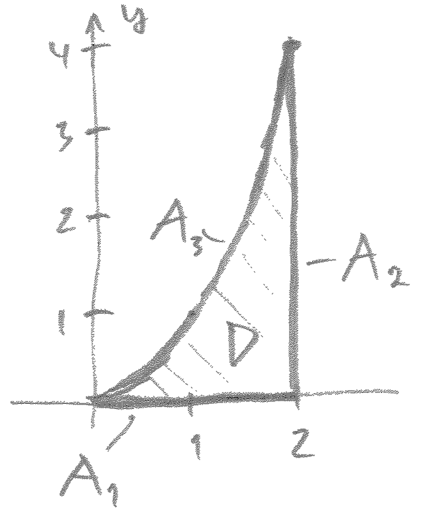
joten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3e^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -4e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 12(e^{-\frac{1}{2}})^2 = \frac{12}{e} > 0.$$

Koska lisäksi $a = -3e^{-\frac{1}{2}} < 0$, niin Q on positiivisesti definiitti ja näin ollen $(0, \frac{1}{2})$ on aito lokaali maksimikohta. $(+1p)$

4\. Merkitään

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x \leq 2,\ y \leq x^2\}.$$



Koska D on kompakti ja f on jatkuva, niin f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa D:ssä. Koska tehtävän 3(a) perusteella f:n ainoa kriittinen piste on $(2,-2)$, joka ei ole D:n (sisä)piste, niin f:llä ei ole lokaaleja ääriarvokohtia D:n sisäpisteissä. (+2p)

Näin ollen f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukon D reunalla ∂D. Selvitetään siis f:n arvot joukossa

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ 0 \le x \le 2\} \quad (= A_1)$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 2,\ 0 \le y \le 4\} \quad (= A_2)$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2,\ 0 \le x \le 2\}. \quad (= A_3)$$

Joukko A_1: Kun $y = 0$, niin

$$f(x,0) = 1 + x^2,$$

jonka pienin arvo joukossa A_1 on $f(0,0) = 1 + 0^2 = 1$ ja suurin arvo on $f(0,2) = 1 + 2^2 = 5$. (+1p)

Joukko A_2: Kun $x = 2$, niin

$$f(2,y) = 1 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot y - 4y$$
$$= 1 + 4 + 4y - 4y = 5,$$

joten joukossa A_2 f:llä on vakioarvo 5. (+1p)

Joukko A_3: Kun $y = x^2$, niin

$$f(x,x^2) = 1 + x^2 + 2x\cdot x^2 - 4x^2$$
$$= 1 - 3x^2 + 2x^3 =: \tilde{f}(x) \quad , \quad 0 \le x \le 2.$$

Nyt
$$\tilde{f}'(x) = -6x + 6x^2 = 6x(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ tai } x = 1,$$

ja
$$f(0,0^2) = \tilde{f}(0) = 1 - 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0^3 = 1,$$
$$f(1,1^2) = \tilde{f}(1) = 1 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1^2 = 0$$
$$f(2,2^2) = \tilde{f}(2) = 1 - 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 = 5. \quad (+1p)$$

Näin ollen f:n arvot on selvitetty koko joukossa $\partial D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ja nähdään, että f:n pienin arvo on 0, joka saavutetaan pisteessä $(1,1)$, ja f:n suurin arvo on 5, joka saavutetaan koko joukossa A_2.

(+1p)

Huom: Joukot A_1, A_2 ja A_3 voi selvittää myös Lagrangen kertoimien avulla. Selvitetään malliksi joukko A_3:

$$g(x,y) = x^2 - y \in C^1(\mathbb{R}^3) \text{ ja}$$

$$\nabla g(x,y) = (2x,-1) \neq (0,0) \quad \forall (x,y) \in A_3.$$

Lisäksi

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = \lambda 2x \\ 2x - 4 = -\lambda \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{tai} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Näissä mahdollisissa ääriarvokohdissa on $f(0,0) = 1$ ja $f(1,1) = 0$.

Lisäksi on tarkistettava toinen kulmapiste $(2,4)$, jossa $f(2,4) = 5$.