VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 9
SYKSY 2012

Kaikissa tehtävissä on kuvan piirtäminen oleellinen osa tehtävän ratkaisemista!

1. Laske

$$\int_B \big(\sin^2(x_1+x_2) - \cos(x_1-x_2)\big)dx_1dx_2$$

kun $B := \big\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| \leq 4\big\}$. (Muuttujanvaihto yksinkertaistaa laskuja.)

2. Osoita, että seuraava joukko on nollajoukko avaruudessa $\mathbb{R}^3$:

$$A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3, x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

3. Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ tetraedri, neljän tason rajoittama kappale, jonka kärjet ovat pisteissä $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ ja $(0,0,3)$. Laske

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz,$$

kun $f(x,y,z) = 1 - z$. Ohje. Integroimisrajat voit johtaa esimerkiksi seuraavasti. Tarkastele ensin x– ja y–koordinaatteja: voit esim. olettaa, että $x \in [0,1]$. Muuttujan y integroimisrajat riippuvat tämän jälkeen x:stä. Seuraavaksi, z:n integroimisrajat riippuvat sekä x:stä että y:stä. Lopuksi, integroi ensin z, sitten y, sitten x.

4. Laske integraali

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz,$$

kun $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ ja $B \subset \mathbb{R}^3$ on 1. oktantissa sijaitseva kappale, jota rajoittavat sylinteripinnat $x^2 + z^2 = 1$ ja $x^2 + z^2 = 4$, sekä tasot $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$ ja $x = z$. (Sylinterikoordinaatit.)

5. Laske kappaleen A tilavuus (eli integroi vakiofunktio 1 A:n yli), kun A:ta rajoittaa yläpuolelta pallopinta $x^2+y^2+z^2 = 6$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2+y^2$. (Jälleen on kätevä käyttää sylinterikoordinaatteja. Voit käyttää tietoa, että pallopinta ja paraboloidi leikkaavat sylinteripinnalla $r = \sqrt{2}$.)

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^3$ kappale, jota rajoittaa yläpuolelta taso $z = 2y$ ja alapuolelta paraboloidi $z = x^2 + y^2$. Integroi funktio $g(x,y,z) = y$ yli joukon A. Ohje. Muuttujan z integroimisrajat määräytyvät suoraan annetuista pinnoista. Edelleen, mainittujen pintojen leikkaus sijaitsee sylinteripinnalla T, joka on muotoa

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-A)^2 + (y-B)^2 = C^2\},$$

missä A, B ja C ovat reaalilukuja. Laskemalla nämä luvut saat integroimisrajat x:lle ja y:lle. Integraalin (pitkä!) lasku onnistuu ainakin niin, että x:n rajat lausuu y:n funktiona. Integroimisjärjestys siis: $z; x; y$.