

VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 8
SYKSY 2012

1. Laske

$$\int_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy,$$

kun

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}.$$

2. Laske integraali

$$\int_A (2u - v^2) du dv$$

kun $A := B(\bar{0}, 5) \setminus ([-1, 1] \times [0, 2])$.

3. Olkoon D tason osajoukko $\bar{B}(\bar{0}, 1) \setminus B(\bar{0}, 1/2)$. Laske integraali

$$\int_D \log(x^2 + y^2) dA$$

4. Laske sen rajoitetun tasoalueen pinta-ala, jonka reunan muodostavat paraabelit $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ ja $x = 3y^2$. Ohje. Piirrä kuva. Käytä muuttujanvaihtokuvasta

$$w^{-1}(x, y) := \left(\frac{y}{x^2}, \frac{x}{y^2} \right)$$

sekä jakobiaaneja koskevaa kaavaa

$$\tau(w)(s, t) = \frac{1}{\tau(w^{-1})(w(s, t))},$$

missä on merkitty (s, t) :llä muuttujia w :n määrittelyalueessa.

5. Olkoon $\alpha \geq 0$. Millä α :n arvoilla epäoleellinen integraali

$$\int_B \frac{1}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^{\alpha/2}} dx dy$$

suppenee, missä $B := [-3, 3] \times [-3, 3]$. (Kannattanee soveltaa sopivaa muuttujanvaihtoa ja rajoittaa tarkastelua sopivaan kieksoon, että pääsee käyttämään napa-koordinaatteja.)

6. Laske muunnoksen $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\phi(x, y) := (x^3, x - y),$$

Jacobin determinantti. Onko ϕ bijektio?