VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 7
SYKSY 2012

Implisiittifunktiolause: Olkoon $f \in C^1(D)$, missä $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ avoin, ja oletetaan, että pisteessä $(\bar{a}, b) \in D$ (tässä $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ ja $b \in \mathbf{R}$) pätee

$$f(\bar{a}, b) = 0, \qquad \partial_{n+1} f(\bar{a}, b) \neq 0.$$

Tällöin on olemassa pisteen $\bar{a}$ ympäristö $B(\bar{a}, r) \subset \mathbf{R}^n$ ja pisteen b ympäristö $B(b, s) \subset \mathbf{R}$, joille pätee: kun $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$, niin yhtälöllä

$$f(\bar{x}, y) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu $y = y(\bar{x}) =: \phi(\bar{x}) \in B(b, s)$. Näin määritelty ("implisiitti")funktio $\phi : B(\bar{a}, r) \to B(b, s)$ on kerran jatkuvasti derivoituva, ja sen 1. kertaluvun osittaisderivaatat saadaan kaavasta

$$\partial_i \phi(\bar{x}) = -\frac{\partial_i f(\bar{x}, \phi(\bar{x}))}{\partial_{n+1} f(\bar{x}, \phi(\bar{x}))} \quad , \quad i = 1, \ldots, n,$$

1. Totea, että yhtälö

$$x^4 + y^4 - 2xy = 0$$

määrittelee tason pisteen $(1, 1)$ ympäristössä muotoa $\{(x, y) : y = \phi(x)\}$ olevan käyrän. Esitä käyrän tangentin yhtälö pisteessä $(1, 1)$.

2. Tutki vastaavasti yhtälöä

$$\cos x - e^y - x \sin y = 0$$

pisteiden $(0, 0)$ ja $(e^{\pi/2}, \pi/2)$ ympäristössä.

3. Laske

$$\int_D f dA$$

kun D on kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä $(0, 0)$, $(0, 1)$ ja $(1, 1)$, sekä

$$\text{a)} \quad f(x, y) := x^2 y, \qquad \text{b)} \quad f(x, y) := \frac{xy}{3 + y^4}$$

4. Laske $\int_D f dA$, kun

$$D := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 5 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq x^2\}$$

ja

$$\text{a)} \quad f(x, y) := 2x^2 - y^2 + 3xy, \qquad \text{b)} \quad f(x, y) := \cos(\pi x) - xe^{-y}.$$

5. Olkoon G kolmio, jonka pisteet (x, y) toteuttavat $0 \leq x \leq \pi/2$ ja $0 \leq y \leq x$. Laske integraali

$$\iint_G (x^3 y + \cos x) dx dy.$$

6. Olkoot A, $B \subset \mathbf{R}^2$ sekä $A \subset B$. Osoita, että jos B on nollajoukko, niin myös A on nollajoukko.