VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 5
SYKSY 2012

1. Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funktio

a) $f(x_1, x_2) := (9 - x_1^2 - x_2^2)e^{(x_1+x_2)/2}$, b) $f(x, y) := y^3 + x(3y - x^2)$, c) $f(\bar{x}) = (x_1 - 2x_2)^2$.

Määrää f:n lokaalit ääriarvokohdat. Piirrä kohdan c) funktion kuvaaja.

2. Samoin, kun

a) $f(x, y) := x^2 + y^2 + x(y + 1) - y$, b) $f(x, y) := x^3 - 4xy^2 + x^2$.

(Kohta b): tarkastele arvoja x–akselilla ja paraabelilla $y^2 = x$.)

3. Kun $f \in C^1(\mathbb{R})$ on funktio, jolla on täsmälleen yksi kriittinen piste, missä sillä on aito lokaali minimi, niin kyseinen piste on myös f:n aito absoluuttinen minimi. Osoita esimerkillä, että vastaava ei päde kahden muuttujan funktioille $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Voit tutkia esimerkiksi funktiota

$$f(x, y) := -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}$$

4. Todista väliarvolause avaruudessa $\mathbb{R}^n$: Olkoon $D \subset \mathbb{R}^n$ avoin, $f \in C^1(D)$, $x, y \in D$, ja jana

$$I := \{ty + (1 - t)x \mid t \in [0, 1]\} \subset D.$$

Tällöin on olemassa sellainen $\xi \in I$, että

$$f(y) - f(x) = \nabla f(\xi) \cdot (y - x).$$

Neuvo. Tarkastele funktiota $\varphi(t) := f(ty + (1 - t)x)$, missä $t \in [0, 1]$.

5. Kuinka monta desimaalia luvuista e ja π on tunnettava, että luku $e\pi + (e\pi)^2$ saadaan laskettua tarkkuudella $0,001$? Neuvo. Sovella edellisessä tehtävässä esitettyä väliarvolausetta sopivaan kahden muuttujan funktioon.

6. Tutki seuraavien neliömuotojen definiittisyyttä:

a) $R(h, k) := 4hk - h^2 - 4k^2$, b) $Q(h, k) := 2h^2 - 6hk + k^2$.