VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 4
SYKSY 2012

1. Olkoon $f(x,y) = (xy, x - y^2)$ ja $g(y^3, \cos(\pi xy/2))$. Laske funktioiden $g \circ f$ ja $f \circ g$ derivaatta pisteessä $(1,1)$.

2. Mihin suuntaan funktio $f(\bar{x}) = 1 + x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$ kasvaa nopeimmin pisteessä $(1,0,3)$? Laske myös f:n derivaatta suuntaan $(-1,1,-1)/\sqrt{3}$.

3. Laske $\partial_2 f$, $\partial_{21} f$, $\partial_{12} f$, $\partial_{213} f$, $\partial_{123} f$ ja $\partial_3^2 \partial_2 \partial_1 f$, kun

$$f(\bar{x}) = e^{x_1 - x_2^2} x_3 \quad , \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

4. Todista (vetoamatta kirjan Lauseeseen 2.8.3.) derivoimisjärjestyksen vaihdannaisuus $\partial_{12} g(\bar{x}) = \partial_{21} g(\bar{x})$, kun $g \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ avoin, on kahden muuttujan funktio, joka on äärellinen summa tulomuotoa $f(x_1)h(x_2)$ olevista funktioista, missä siis f ja h ovat yhden muuttujan funktioita. (Tästä voisi periaatteessa kehittää vaihtoehtoisen todistuksen Lauseelle 2.8.3, approksimoimalla annettua funktiota $\tilde{g} \in C^2(D)$ ym. muotoa olevilla funktioilla. Tämän tarkastelun valossa Lauseen 2.8.3 tulos ei ole tosiaankaan ole yllättävä.)

5. Muodosta toisen asteen Taylorin kehitelmä funktioille

$$f(x,y) = e^{x+y} \quad \text{ja} \quad g(x,y) = \frac{x}{1-y}$$

pisteessä a) $(0,0)$, b) $(1,2)$.

6. Etsi pisteitä $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, joissa tehtävän 1 funktiolle f pätee, että derivaatan $f'(a,b) =: M$ determinantti on 0. Kertaa lineaarialgebrasta, mitä tämä kertoo lineaarikuvauksen M kuvausominaisuuksista (onko M injektio, surjektio, bijektio). Pohdiskele (ilman todistuksia, asiaan palataan myöhemmin), mitä tämä vaikuttaa f:n kuvausominaisuuksiin pisteen (a,b) ympäristössä.