VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 3
SYKSY 2012

1. Laske funktion f,

$$\text{a)}\quad f(\bar{x}) = e^{x_1^2+x_2^2} + 2\ ,\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^2,\quad \text{b)}\quad f(\bar{x}) = \frac{x_1^3\cos x_2}{\sin x_3}\ ,\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^3,\ x_3\neq \pi n, n\in\mathbb{Z},$$

gradientti. Kohdassa a), muodosta f:n kuvaajaa pisteessä $(0,1,f(0,1))$ approksimoivan tangettitason yhtälö ja piirrä vastaava kuva.

2. Laske funktion $f:\mathbb{R}^2\setminus\{\bar{0}\}\to\mathbb{R}$,

$$f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|^{\|\bar{x}\|}\ ,$$

gradientti.

3. Olkoon $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differentioituva koko tasossa, ja oletetaan että $\nabla f(\bar{x}) = 0$ kaikilla $\bar{x}\in\mathbb{R}^2$. Osoita, että f on vakiofunktio.

4. Muodosta ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ketjusääntöä käyttäen, kun f on

$$\text{a)}\quad f(\bar{x}) = \sin\left(e^{x_1^2+x_2^2}+2\right)\ ,\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^2,\quad \text{b)}\quad f(\bar{x}) = \left(x_1^2x_3 - x_2^3x_3\right)^2\ ,\quad \bar{x}\in\mathbb{R}^3.$$

5. Muodosta yhdistetty funktio $f\circ g$, kun

a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\ ,\ f(\bar{x}) = x_3^2+\sin(x_1+x_2)\ ,$
$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ ,\ g(\bar{x}) = (x_3, x_2^2, e^{x_1+x_2})$

b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ,\ f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}\ ,$
$g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ ,\ g(\bar{x}) = (x_1-x_2, x_2-x_3)\ .$

6. Laske edellisen tehtävän funktioiden $f\circ g$ ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat suoraan sekä ketjusääntöä käyttäen.