

VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 1
SYKSY 2012

1. Laske $\bar{x} \cdot \bar{y}$, kun

a) $\bar{x} = (-1, 0, 3)$ ja $\bar{y} = (1, 5, 2)$

b) $\bar{x} = (-1, 1, -1, 1)$ ja $\bar{y} = (2, 3, 3, 2)$

Ovatko vektorit \bar{x} ja \bar{y} kohtisuorassa toisiaan vastaan?

2. Muodosta jonon $(\bar{x}^{(m)})_{m=1}^{\infty} \subset \mathbf{R}^3$, missä $\bar{x}^{(m)} = (3, me^{-m}, 2 + m^{-2})$ komponentti- eli koordinaattijonot. Laske jonon $(\bar{x}^{(m)})_{m=1}^{\infty}$ raja-arvo.

3. Suppeneeko vektorijono eli pistejono $(\bar{y}^k)_{k=1}^{\infty}$, kun

$$\bar{y}^k = \left(\frac{5+k}{k^2}, \frac{(-1)^k}{k}, \frac{2+k}{k}, \frac{1}{k^2} \right) \in \mathbf{R}^4 \quad ?$$

Jos suppenee, mikä on jonon raja-arvo?

4. Samoin, kun

$$\bar{y}^k = \left(2, \frac{\sin(k\pi/4)}{k}, \sin(k\pi/4) \right) \in \mathbf{R}^3 \quad ?$$

5. Tarkastellaan seuraavia tason osajoukkoja:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 0, y \in \mathbf{R}\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y \leq x\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > y, y \in \mathbf{R}\}$$

Ovatko nämä avoimia tai suljettuja?

6. Olkoon $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $n = 2, 3, \dots$. Käytämme vektorin pituudelle merkintää

$$\|\bar{x}\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2}$$

ja lisäksi merkitään

$$\|\bar{x}\|_{\infty} = \max_{j=1, \dots, n} |x_j| \quad \text{ja} \quad \|\bar{x}\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

Osoita, että

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}\|_{\infty} \leq \|\bar{x}\| \leq \|\bar{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\bar{x}\|.$$

(Cauchy-Schwartzin epäyhtälöstä voi olla apua.)