VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 11
SYKSY 2012

1. Olkoon
$$A := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 < y < 2,\ x^2 + z^2 < 4\}.$$
Määritä vektorikentän $F(x, y, z) := (0, y, 0)$ kokonaisvuo ulospäin pinnan ∂A läpi.

2. a) Laske vektorikentän $F(x, y, z) := (x^2 + y^2, y^2 - z^2, z)$ vuo pallopinnan
$$S := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$$
läpi, kun $R > 0$ on vakio.
b) Samoin, kun $F(x, y, z) := (x^3, 3yz^2, 3y^2z + x^2)$.

3. Laske Stokesin lauseen avulla integraali
$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s},$$
kun $F(x_1, x_2, x_3) := (2x_2, 3x_3, x_1)$ ja γ on kolmion reuna ja kolmion kärkipisteet ovat $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ ja $(1, 1, 1)$.

4. Olkoon $r : D \to \mathbf{R}^3$, missä $D := (0, 2\pi) \times (0, 1) \subset \mathbf{R}^2$ ja
$$r(\varphi, t) := (t \cos \varphi, t \sin \varphi, t).$$
Laske pinnan $r(D)$ ala.

5. Laske Stokesin lauseen avulla
$$\int_\gamma y dx - x dy + z^2 dz,$$
kun γ on sylinterien $z = y^2$ ja $x^2 + y^2 = 4$ leikkaus suunnistettuna vastapäivään, kun katsotaan kaukaa positiivisen z–akselin puolelta.

6. Osoita, että tason avoin, konveksi osajoukko on yhdesti yhtenäinen. Ohje. Joukko A on konveksi, mikäli $tx + (1-t)y \in A$ aina, kun $x, y \in A$ ja $0 < t < 1$. Joukko A on yhdesti yhtenäinen, jos jokainen A:n suljettu polku $\gamma : [0, 1] \to A$ voidaan kutistaa pisteeksi jatkuvilla muunnoksilla; täsmällisesti, jos γ on kuten edellä, on olemassa piste $a \in A$ ja jatkuva kuvaus $h : [0, 1] \times [0, 1] \to A$, jolle
$$h(0, t) = \gamma(t) \quad \text{ja} \quad h(1, t) = a \quad \text{kaikilla } t \in [0, 1].$$
Lopuksi, voit esim. olettaa, että $\bar{0} \in A$.