VEKTORIANALYYSI
LASKUHARJOITUS 10
SYKSY 2012

Luennoilla, laskuharjoitustehtävissä ja tenttitehtävissä käytetään nimitystä "integraali kaarenpituuden suhteen" oppikirjan määritelmän 6.1.1 mukaiselle integraalille ja "vektorikentän käytäintegraali" määritelmälle 6.1.6.. Edelleen, kuten kirjassa, voidaan myös käyttää termiä "käyräintegraali", joka voi tarkoittaa kumpaa tahansa edellisistä. Käyräintegraalien laskukaavoissa differentiaalin merkintä "ds" viittaa aina integraaliin kaarenpituuden suhteen. Lisäksi käytetään merkintöjä

$$\int_\gamma F \cdot d\bar{s} = \int_\gamma f dx + g dy + h dz = \int_\gamma f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz,$$

missä F on vektorikenttä $F = (f,g,h)$ ja f,g,h skalaarifunktioita. Vastaavasti tapauksessa $n = 2$, $\int_\gamma F \cdot d\bar{s} = \int_\gamma f dx + g dy$ jne. kentälle $F = (f,g)$.

1. Laske $\int_\gamma f(x,y,z)ds$, kun $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\gamma(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$ ja $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

2. Kuten tehtävä 1, mutta integoitava funktio on $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ ja polku γ on kolmesta janasta koostuva murtoviiva, jonka alkupiste on $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$, loppupiste $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ ja ensimmäinen osa on z-akselin, toinen y-akselin ja kolmas x-akselin suuntainen.

3. Laske

$$\int_\Gamma (x+2y)dx + (2z-y)dy + 3x^2 dz,$$

kun $\Gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ja parametri t valitaan siten, että Γ:n alkupiste on origo ja loppupiste $(2,4,8)$.

4. Tutki seuraavien vektorikenttien $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ eksaktiutta, ja mikäli ne ovat eksakteja, määritä niiden jokin potentiaali: a) $F(x,y) := (y + 2xy^2, x(1+2xy))$, b) $F(x,y) := (x, y + 2 + x^3)$, c) $F(x,y) := (e^x + y^2, e^y + 2xy)$

5. Laske vektorikentän $F(x,y) = (xy^2, -x^2y)$ käyräintegraali pitkin kiekon $B(\bar{0}, 100) \subset \mathbb{R}^2$ reunaa.

6. Osoita, että vektorikenttä $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$,

$$F(x,y,z) := (e^x \sin y + y, e^x \cos y + x - z, -y)$$

on eksakti, ja määrää jokin sen potentiaali. (Ohje. Vektorikentän eksaktius korkeammissa dimensioissa määritellään kuten tason tapauksessa, eli vaaditaan, että on olemassa jatkuvasti derivoituva skalaarifunktio u, jolle $\nabla u = F$. Mikäli määrittelyalue on esimerkiksi $\mathbf{R}^3$, saadaan eksaktisuudelle välttämätön ja riittävä ehto komponenttien osittaisderivaattoja koskevista yhtälöistä (3 kpl), kuten dimensiossa 2. Potentiaalin laskemiseksi joudutaan yleensä ratkaisemaan kolme differentiaaliyhtälöä.)