Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 9, 29.11.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. (a) Olkoon $\delta, \varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \tfrac{\delta}{2}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

aina kun $n \geq N$. Selvästikin

$$\{|X_m - X_n| \geq \delta\} \subset \{|X_m - X| \geq \tfrac{\delta}{2}\} \cup \{|X_n - X| \geq \tfrac{\delta}{2}\},$$

joten

$$\mathbb{P}(|X_m - X_n| \geq \delta) \leq \mathbb{P}(|X_m - X| \geq \tfrac{\delta}{2}) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \tfrac{\delta}{2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

aina kun $m, n \geq N$.

(b) Olkoon $\varepsilon > 0$. Oletuksen nojalla jokaiselle $k \in \mathbb{N}$ voidaan valita n_k siten, että

$$\mathbb{P}(|X_m - X_n| \geq \varepsilon) < \frac{1}{2^k}$$

aina kun $m, n \geq n_k$ ja jono (n_k) on kasvava. Osoitetaan, että muodostettu jono (X_{n_k}) on Cauchy melkein varmasti. Summaamalla yhtälöt puolittain saadaan

$$\sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{P}(|X_{n_k} - X_{n_j}| \geq \varepsilon) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1,$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$, joten Borel-Cantellin lemma I nojalla

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq i} \{|X_{n_k} - X_{n_j}| \geq \varepsilon\}\Big) = \mathbb{P}\big(\limsup\{|X_{n_k} - X_{n_j}| \geq \varepsilon\}\big) = 0.$$

On siis olemassa $i \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|X_{n_k} - X_{n_j}| < \varepsilon \quad \text{m.v}$$

aina kun $k \geq i$, erityisesti kun $k, j \geq i$.

(c) Edellisen kohdan nojalla (X_{n_k}) on Cauchy jono melkein varmasti, joten avaruuden $\mathbb{R}$ täydellisyyden nojalla on olemassa X siten, että $X_{n_k} \to X$ melkein varmasti. Lauseen 6.0.1 nojalla $X_{n_k} \to X$ stokastisesti. Nyt kuten (a)-kohdassa kaikilla $\delta, \epsilon > 0$ on olemassa $N = \max\{n_0, n_{k_0}\}$ siten, että

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta) \leq \mathbb{P}(|X_{n_k} - X| \geq \tfrac{\delta}{2}) + \mathbb{P}(|X_n - X_{n_k}| \geq \tfrac{\delta}{2}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

aina kun $n, n_k \geq N$.

2. Esimerkiksi $f(x) = \min(1, 1/x)$ ja $\lambda(dx) = dx$ on Lebesguen mitta:

$$\| f \|_{L^1(\mathbb{R},\lambda)} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2 + 2 \int_1^\infty x^{-1} dx = +\infty$$
$$\| f \|^p_{L^p(\mathbb{R},\lambda)} \int_{\mathbb{R}} f(x)^p dx = 2 + 2 \int_1^\infty x^p dx = 2 + \frac{2}{p-1} < \infty$$

Kun $p > 1$. Siis $\| f \|_{L^1(\mathbb{R},\lambda)} = +\infty$.

Tämä ei ole ristiriidassa Jensenin epäyhtälön kanssa:

$$\int_\Omega g(X(\omega))\mu(d\omega) \geq g\Big(\int_\Omega X(\omega)\mu(d\omega)\Big)$$

kun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi ja $\int_\Omega |X(\omega)|\mu(d\omega) < \infty$.

Todistus perustui siihen, että rajoitettu mitallinen funktio on integroituva todennäköisyysmitan suhteen. Tämä ei tietysti pidä paikkaansa, kun integroidaan äärettömän mitan suhteen.

3. (a) Palautetaan mieleen analyysin I kurssilta, että funktio on konveksi jos ja vain jos sen derivaattafunktio g' on kasvava ts. $g'' \geq 0$. Annettu funktio f on selvästikin konveksi, kun $p = 1$. Voidaan olettaa, että $p \neq 1$ ja yksinkertaisuuden vuoksi $x > 0$. Tällöin funktion f toisen kertaluvun derivaatta on

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p > 1.$$

(b) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^d$ ja $\lambda \in [0, 1]$. Funktion f, g konveksisuuden ja f:n ei-vähenevyyden nojalla

$$\begin{aligned} f \circ g\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) &= f\big(g(\lambda x + (1-\lambda)y)\big) \leq f\big(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\big) \\ &\leq \lambda f\big(g(x)\big) + (1-\lambda) f\big(g(y)\big) = \lambda f \circ g(x) + (1-\lambda) f \circ g(y). \end{aligned}$$

(c) Määritellään $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ ja f kuten (a)-kohdassa. Koska kuvaus g on normi, niin se on konveksi. Kompositiofunktio $f \circ g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \circ g(x) = |x|^p$ on (b)-kohdan nojalla konveksi.

4. (a) Satunnaismuuttujien $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ riippumattomuuksien, $\mathbb{E}(X_k) = 0$ ja $\mathbb{E}\big(|X|^k\big) < \infty$ nojalla

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big(\big(\sum_{k=1}^n X_k\big)^3\Big) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j,k=1}^n X_i X_j X_k\Big) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big(X_k^3\big) + \sum_{i \neq j, j \neq k} \underbrace{\mathbb{E}(X_i X_j X_k)}_{=0} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\big(X_k^3\big). \end{aligned}$$

(b) Laskemalla kuten edellä saadaan

$$\mathbb{E}\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} X_k\big)^4\Big) = \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j,k,l=1}^{n} X_i X_j X_k X_l\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(X_k^4\big) + \binom{4}{2} \sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2)$$
$$\geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big(X_k^4\big).$$

Epäyhtälö on aito, jos $\mathrm{Var}(X_i), \mathrm{Var}(X_j) > 0$ jollain $i < j$. Ei siis päde yleisesti korkeimman asteen potenssille $p = 4$.