Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 8, 15.11.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. Tehtävän voi todistaa vastaoletuksella kuten luennnon lauseen 7.0.1 todistuksessa. Näytetään tässä toisen version eli suora todistuksen. Sovelletaan todistuksessa lausetta 7.0.1:

   Koska $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|), \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$, niin
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n + Y_n|) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|Y_n|) < \infty.$$
   Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska satunnaismuuttujat $\{X_n\}$ ja $\{Y_n\}$ ovat tasaisesti integroituvia, niin lauseen 7.0.1 nojalla on olemassa $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ siten, että
   $$\max\big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(|X_n|\mathbf{1}_A\big), \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(|Y_n|\mathbf{1}_A\big)\big\} < \frac{\varepsilon}{2}$$
   aina kun $\mathbb{P}(A) < \delta$. Olkoon $A \in \mathcal{F}$ siten, että $\mathbb{P}(A) < \delta$. Tällöin
   $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\big(|X_n + Y_n|\mathbf{1}_A\big) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_A) + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|Y_n|\mathbf{1}_A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
   Lauseen 7.0.1 nojalla satunnaismuuttujat $\{X_n + Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ovat tasaisesti integroituvia.

2. (a) Olkoon $p > 1$. Tällöin
   $$\mathbb{E}(|X|^p) \geq \mathbb{E}(|X|^p \mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}) \geq \mathbb{E}(|X|^{p-1}|X|\mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}) \geq K^{p-1}\mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}),$$
   mistä seuraa Chebyschevin variaatio
   $$\mathbb{E}(|X|\mathbf{1}_{\{|X|\geq K\}}) \leq K^{1-p}\mathbb{E}(|X|^p).$$
   (b) Sovelletaan (a)-kohta:
   $$0 \leq \lim_{K\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|\mathbf{1}_{\{|X_n|\geq K\}}) \leq \lim_{K\to\infty} K^{1-p} \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|X_n|^p)}_{<\infty} = 0$$
   kaikilla $p > 1$. Määritelmän 7.0.2 nojalla satunnaismuuttujat $\{X_n\}$ ovat tasaisesti integroituvia.

3. Edetään todistus helpoimmasta vaikeampaa:

" $\Leftarrow$ " Olkoot $B_1, B_2, \dots, B_d \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_d \in B_d) &= \mathbb{P}_X(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d)\\ &= (\mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d})(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d)\\ &= \mathbb{P}_{X_1}(B_1)\mathbb{P}_{X_2}(B_2)\cdots\mathbb{P}_{X_d}(B_d)\\ &= \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(X_i \in B_i),\end{aligned}$$

joten satunnaismuuttujat $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$ ovat riippumattomia.

" $\Rightarrow$ " Satunnaismuuttujien $X_1, X_2, \dots, X_d$ riippumattomuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_X(U) &= \mathbb{P}_X\big(B(q_1, 1/n_1) \times B(q_2, 1/n_2) \times \cdots \times B(q_d, 1/n_d)\big)\\ &= \mathbb{P}_X\big(X_1 \in B(q_1, 1/n_1), X_2 \in B(q_2, 1/n_2), \dots, X_d \in B(q_d, 1/n_d)\big)\\ &= \mathbb{P}\big(X_1 \in B(q_1, 1/n_1)\big)\mathbb{P}\big(X_2 \in B(q_2, 1/n_2)\big)\cdots\mathbb{P}\big(X_d \in B(q_d, 1/n_d)\big)\\ &= (\mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d})(U)\end{aligned}$$

kaikilla $U \in \mathcal{G}_3$. Harjoituksen 3 tehtävän 6 (ratkaisun) nojalla $\sigma(\mathcal{G}_3) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Koska $\mathcal{G}_3$ on π-luokka, $\mathbb{P}_X$ ja $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d}$ ovat todennäköisyysmittoja, niin mitan yksikäsitteisyyslauseen (2.1.1) nojalla $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \mathbb{P}_{X_2} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d}$.

4. (a) Lasketaan satunnaismuuttujan $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ momentti generoiva funktio ϕ_λ sekä sen ensimmäisen ja toisen kertaluvun derivaatat:

$$\phi_\lambda(t) = \mathbb{E}_\lambda(\exp(tN)) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\phi_\lambda'(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t = \lambda e^t \phi_\lambda(t)$$

$$\phi_\lambda''(t) = \lambda e^t \phi_\lambda(t) + \lambda e^t \phi_\lambda'(t) = (\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t})\phi_\lambda(t)$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

(b) Esimerkin 8.0.2 nojalla tai laskemalla helpohko laskulla (vrt. 5.(a)):

$$\phi_\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\mathbb{E}_\lambda(N^j) \quad \Longrightarrow \quad \phi_\lambda^{(j)}(0) = \mathbb{E}_\lambda(N^j).$$

Nyt (a)-kohdan nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\lambda(N) &= \phi_\lambda'(0) = \lambda\\ \mathbb{E}_\lambda(N^2) &= \phi_\lambda''(0) = \lambda + \lambda^2.\end{aligned}$$

5. (a) Taylorin eksponenttisarjan kehitelmän nojalla

$$\phi(t) = \mathbb{E}(e^{tG}) = e^{\frac{t}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^2/2)^k}{k!} = e\sum_{k=0}^{\infty}(t/2)^k e^{-1}\frac{1}{k!} = e\sum_{k=0}^{\infty}(t/2)^k \mathbb{P}(N=k)$$
$$= e\mathbb{E}\big((t/2)^N\big).$$

(b) Kun $m > 2N$ tai $t = 0$, niin asia on selvä. Voidaan olettaa $m \leq 2N$ ja $t \neq 0$. Tehdään yläraja-arvio:

$$|X^{(m)}(t)| = 2N(2N-1)\cdots(2N-(m-1))|t^{2N-m}|2^{-N} \leq (2N)^m|t^{2N-m}|2^{-N}$$
$$\leq 2^{m-N}|t^{2N-m}| \leq 2^N|t^{2N-m}| = |t^{-m}|(2t^2)^N \quad \text{m.v.}$$

Määritetään ensin satunnaismuuttujan $(2t^2)^N$ odotusarvo:

$$\mathbb{E}\big((2t^2)^N\big) = \sum_{k=0}^{\infty}(2t^2)^k \cdot e^{-1}\frac{1}{k!} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2t^2)^k}{k!} = e^{-1}e^{2t^2} = e^{2t^2-1}.$$

Nyt

$$\mathbb{E}(|X^{(m)}(t)|) \leq |t^{-m}|\mathbb{E}\big((2t^2)^N\big) = |t^{-m}|e^{2t^2-1} < \infty$$

kaikilla $t \neq 0$. Siis $X^{(m)}(t) \in L^1(\mathbb{P})$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

(c) Valitaan esimerkiksi avoimeksi väliksi $(a,b) = B(0,1) = (-1,1)$ (origon ympäristö), Tällöin laskemalla kuten yllä, saadaan ylärajaksi

$$|X^{(m)}(t)| \leq 2^N \quad \text{m.v.}$$

Huomataan, että

$$|X^{(m)}(t)| > K \quad \Longrightarrow \quad N > \frac{\ln K}{\ln 2} \doteq L.$$

Kun $K \to \infty$, niin selvästikin $L \to \infty$. Voidaan olettaa K on suuri. Odototusarvon yläraja on

$$\mathbb{E}\big(|X^{(m)}(t)|\mathbf{1}_{\{|X^{(m)}(t)|>K\}}\big) \leq \mathbb{E}\big(2^N\mathbf{1}_{\{N>L\}}\big) \leq \sum_{j=L}^{\infty} 2^j \cdot e^{-1}\frac{1}{j!}$$

kaikilla $t \in (-1,1)$. Ottamalla supremumin yli joukon $t \in (-1,1)$ saadaan

$$\sup_{t\in(-1,1)} \mathbb{E}\big(|X^{(m)}(t)|\mathbf{1}_{\{|X^{(m)}(t)|>K\}}\big) \leq e^{-1}\sum_{j=L}^{\infty}\frac{2^j}{j!} \to 0,$$

kun $K \to \infty$, sillä sarja $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2^j}{j!}$ on suppeneva. Määritelmän 7.0.2 nojalla satunnaismuutujat $\{X(t) : t \in (-1,1)\}$ ovat tasaisesti integroituvia.

(d) Yhtälöiden ensimmäiset yhtäsuuruudet ovat triviaaleja. Riittää perustella derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihto lauseen 8.0.3 avulla. Selvästikin polynomifunktio on jatkuva, joten kuvaus $X^{(m)}(\cdot,\omega) : (a,b) \times \Omega \to \mathbb{R}$ on jatkuva kaikilla $\omega \in \Omega$ ja kuvaus $X^{(m)}(t,\cdot)$ on satunnaismuuttuja ($\mathcal{F}$-mitallinen) kaikilla $t \in \mathbb{R}$ (suoralla laskulla ja tietoa N on satunnaismuuttuja). Lisäksi (c)-kohdan nojalla satunnaismuuttujat $\{X^{(m)}(t) : t \in B(0,r)\}$ ovat tasaisesti integroituvia, missä säde $r = 1$ (pätee yleisestikin). Koska edelliset pätevät mielivaltaisille $m \in \mathbb{N}$, soveltamalla lausetta 8.0.3 toistuvasti saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}\Big(\frac{d}{dt}X(t)\Big) = \mathbb{E}(X'(t)) \\
&\frac{d^2}{dt^2}\mathbb{E}(X(t)) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}\mathbb{E}(X(t))\Big) = \frac{d}{dt}\mathbb{E}(X'(t)) = \mathbb{E}(X''(t)) \\
&\vdots \\
&\frac{d^m}{dt^m}\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}(X^{(m)}(t))
\end{aligned}$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\frac{d^m}{dt^m}\mathbb{E}\Big((t/2)^N\Big) &= \frac{d^m}{dt^m}\mathbb{E}(X(t)) = \mathbb{E}\Big(\frac{d^m}{dt^m}X(t)\Big) = \mathbb{E}\big(X^{(m)}\big) = \mathbb{E}\big(X^{(m)}\mathbf{1}_{\{m\le 2N\}}\big) \\
&= \sum_{k\ge m/2} 2k(2k-1)\cdots(2k-m+1)t^{2k-m}\cdot 2^{-k}\cdot e^{-1}\frac{1}{k!} \\
&= e^{-1}\sum_{k\ge m/2}\frac{d^m}{dt^m}\Big(t^{2k}\Big)\frac{1}{2^k k!} \\
&= e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^m}{dt^m}\Big(\frac{t^{2k}}{2^k k!}\Big),
\end{aligned}$$

mistä seuraa väite korottamalla yhtälö puolittain e.

Huomaa, että tehtävässä on perusteltu myös sarjan summan derivoinnin järjestyksen vaihto:

$$\frac{d^m}{dt^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^m}{dt^m}\Big(\frac{t^{2k}}{2^k k!}\Big).$$

(e) Esimerkin 8.0.2 ja edellisen kohdan nojalla

$$\phi^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m}\mathbb{E}(e^{tG}) = \sum_{k\ge m/2} 2k(2k-1)\cdots(2k-m+1)t^{2k-m}\cdot\frac{1}{2^k k!}.$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbb{E}(G^m) = \phi^{(m)}(0) = \begin{cases}\frac{(2n)!}{2^n n!}, & \text{kun } m = 2n \\ 0, & \text{kun } m = 2n+1\end{cases}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.