Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 7, 08.11.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. Merkitään $A = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0\}$. Osoitetaan, että joukko A^c on nollamittainen ts. $\mathbb{P}(A^c) = 0$, mistä seuraa väite. Nähdään, että $\omega \in A$ täsmälleen silloin, kun kaikilla $i \in \mathbb{N}$ on olemassa $j \in \mathbb{N}$ siten, että $|X_n(\omega)| \le \frac{1}{i}$ aina kun $n \ge j$. Siispä
$$A^c = \Big(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcap_{n=j}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega)| \le \frac{1}{i}\}\Big)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega)| > \frac{1}{i}\}. \tag{1}$$
Oletuksen nojalla
$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\Big(|X_n| > \frac{1}{i}\Big) < \infty$$
kaikilla $i \in \mathbb{N}$, joten Borel Cantellin lemma I nojalla
$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty}\{\omega : |X_n(\omega)| > \frac{1}{i}\}\Big) = 0.$$
kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt tiedon (1) nojalla
$$0 \le \mathbb{P}(A^c) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{\infty}\bigcup_{n=j}^{\infty}\{\omega : |X_n(\omega)| > \frac{1}{i}\}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty}\{\omega : |X_n| > \frac{1}{i}\}\Big) = 0.$$
Siis $X_n \to 0$ melkein varmasti.

Tästä voidaan helposti yleistää seuraavan tuloksen:
$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}\big(|X_n - X| > \epsilon\big) < \infty \quad \forall \epsilon > 0 \quad \Longrightarrow \quad X_n \to X \quad \text{m.v.}$$

2. Osoitetaan väite tehtävän vihjeen mukaisesti Fubinin lauseen (teoreema 8.0.2) käyttäen:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^n) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X\ge 0\}}X^n) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X}(\mathbf{1}_{[0,\infty)}x^n) = \int_0^{\infty} x^n d\mathbb{P}_X(x)\\ &= \int_0^{\infty}\Big(n\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{[0,x]}(t)t^{n-1}dt\Big)d\mathbb{P}_X(x) \overset{\text{Fubini}}{=} n\int_0^{\infty}t^{n-1}\Big(\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{[0,x]}(t)d\mathbb{P}_X(x)\Big)dt\\ &= n\int_0^{\infty}t^{n-1}\Big(\int_0^{\infty}\mathbf{1}_{[0,x]\times\mathbb{R}}(t,x)d\mathbb{P}_X(x)\Big)dt = n\int_0^{\infty}t^{n-1}\mathbb{P}_X\big([t,\infty]\big)dt\\ &= n\int_0^{\infty}t^{n-1}\mathbb{P}\big(X \ge t\big)dt\end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta

$$x^n = n \int_{0+}^{x} t^{n-1} dt = n \int_{0}^{\infty} \mathbf{1}_{(0,x]}(t) t^{n-1} dt,$$

joten laskemalla kuten yllä saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^n) &= n \int_0^\infty t^{n-1} \Big(\int_0^\infty \mathbf{1}_{(0,x] \times \mathbb{R}}(t,x) d\mathbb{P}_X(x) \Big) dt = n \int_0^\infty t^{n-1} \mathbb{P}_X\big((t,\infty]\big) dt \\ &= n \int_0^\infty t^{n-1} \mathbb{P}\big(X > t\big) dt. \end{aligned}$$

3. (a) Merkitään joukko $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Havaitaan, että

$$A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in A\} = \{y \in \mathbb{R} : y \leq x\} = (-\infty, x]$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Koska satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia, niin luennon lauseen 8.0.1 nojalla $\mathbb{P}_{(X,Y)}(B) = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y(B)$ kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Tästä tiedosta ja Fubinin lauseesta (teoreema 8.0.2) seuraa

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Y \leq X\big) &= \mathbb{P}\big((X,Y) \in A\big) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(A) = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y}(\mathbf{1}_A) \\ &= \int_\mathbb{R} \Big(\int_\mathbb{R} \mathbf{1}_A(x,y) d\mathbb{P}_Y(y) \Big) d\mathbb{P}_X(x) = \int_\mathbb{R} \mathbb{P}_Y(A_x) d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_\mathbb{R} \mathbb{P}\big(Y \leq x\big) d\mathbb{P}_X(x) = \int_\mathbb{R} G(x) dF(x). \end{aligned}$$

(b) Funktiot G ja F ovat kertymäfuntioina kasvavia, joten luennon lauseen 8.0.2 nojalla

$$\mathbb{P}\big(Y \leq X\big) = \int_\mathbb{R} G(x) dF(x) = \int_\mathbb{R} G(x-) dF(x) + \sum_{y \in \mathbb{R}} \Delta G(y) \Delta F(y).$$

Toisaalta merkitsemällä $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ ja laskemalla kuten yllä saadaan

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(Y < X\big) &= \int_\mathbb{R} \Big(\int_\mathbb{R} \mathbf{1}_B(x,y) d\mathbb{P}_Y(y) \Big) d\mathbb{P}_X(x) = \int_\mathbb{R} \mathbb{P}_Y\big((-\infty, x)\big) d\mathbb{P}_X(x) \\ &= \int_\mathbb{R} G(x-) dF(x). \end{aligned}$$

Vähentämällä saadut yhtälöt puolittain saadaan

$$\mathbb{P}(Y = X) = \mathbb{P}(Y \leq X) - \mathbb{P}(Y < X) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \Delta G(x) \Delta F(x).$$

(c) Sovelletaan (a)-kohta:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \le X) &= \int_{\mathbb{R}} G(x)dF(x) \\ &= \int_0^\infty (1-e^{-x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx - e^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{e} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{e}(1-F(1)).\end{aligned}$$

(d) Määritetään satunnaismuuttujien X ja Y tulon momentti generoiva funktio M_{XY}. Merkitään $g(x,y) = e^{txy}$. Tällöin satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuuksien ja Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}M_{XY}(t) &= \mathbb{E}(e^{tXY}) = \mathbb{E}(g(X,Y)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_{(X,Y)}}(g) \stackrel{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y}(g) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x,y) dF(x) dF(y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x,y) f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{txy} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \Big) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(y) e^{\frac{1}{2}(ty)^2} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-ty)^2} dx \Big) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-y} e^{\frac{1}{2}(ty)^2} dy = \int_{\mathbb{R}+} e^{\frac{1}{2}t^2y^2 - y} dy\end{aligned}$$

Kun $t = 0$, niin selvästikin $M_{XY}(t) = 1$.

Kun $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, niin

$$M_{XY}(t) = e^{-\frac{1}{2t^2}} \int_{\mathbb{R}+} e^{\frac{1}{2}t^2(y-\frac{1}{t^2})^2} dy \ge e^{-\frac{1}{2t^2}} m_1(\mathbb{R}_+) = e^{-\frac{1}{2t^2}} \cdot \infty = \infty$$

eli $M_{XY}(t) = \infty$.

4. Merkitään $p = 1 - q$. Sovelletaan tehtävän 3 tuloksen. Koska funktio F on kasvava ja on vakio jokaisella avoimella välillä $(k, k+1)$ sekä funktio G on vakio jokaisella välillä $(k, k+1)$, niin Riemann-Stieltjesin integraalin nojalla

$$\int_{\mathbb{R}} G(x-)dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k-1}^{k+1} G(x-)dF(x) = \sum_{k=0}^{\infty} G(k-)\Delta F(k).$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big(Y \leq X\big) &= \int_{\mathbb{R}} G(x-)dF(x) + \sum_{y\in\mathbb{R}} \Delta G(x)\Delta F(x) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} G(k-)(F(k) - F(k-)) + \sum_{k=0}^{\infty}(G(k) - G(k-))(F(k) - F(k-)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} G(k)\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - p^k) \cdot (e^{-1} \cdot \frac{1}{k!}) = e^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!}\Big) \\
&= e^{-1}(e - e^p) = 1 - e^{-q}.
\end{aligned}$$