Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 6, 18.10.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. (a) Tehtävän annon nojalla voidaan satunnaimuuttuja X_n esittää indikaattori satunnaismuuttujien avulla seuraavasti:

$$X_n = (n^{1+\varepsilon} - 1)\mathbf{1}_{\{X_n = n^{1+\varepsilon}-1\}} - \mathbf{1}_{\{X_n=-1\}}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämän satunnaismuuttujan odotusarvo on määritelmän nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) &= (n^{1+\varepsilon} - 1)\mathbb{P}(X_n = n^{1+\varepsilon} - 1) - \mathbb{P}(X_n = -1)\\ &= (n^{1+\varepsilon} - 1)n^{-(1+\varepsilon)} - (1 - n^{-(1+\varepsilon)})\\ &= (1 - n^{-(1+\varepsilon)}) - (1 - n^{-(1+\varepsilon)}) = 0\end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

(b) Harjoituksen 5 tehtävän 4 nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} = \zeta(1+\varepsilon) < 0$$

kaikilla $\varepsilon > 0$ (ζ on Riemannin zeta funktio).Toisaalta tunnetun harmonisen sarjan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantumisen nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

joten

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} = \infty$$

kaikilla $\varepsilon \leq 0$.

(c) Oletuksen mukaan $\varepsilon > 0$, joten (b)-kohdan nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = n^{1+\varepsilon} - 1) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} < \infty.$$

Nyt Borel-Cantelli lemman I (lemma 5.1.1) nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega : \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n} = -1\Big\}\Big) &\geq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\{X_n = -1\}\Big)\\ &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}\{X_n = n^{1+\varepsilon} - 1\}\Big)\\ &= 1 - \mathbb{P}\Big(\limsup_n\{X_n = n^{1+\varepsilon} - 1\}\Big)\\ &= 1 - 0\\ &= 1.\end{aligned}$$

On siis oltava

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega : \lim_{n\to\infty}\frac{S_n(\omega)}{n} = -1\Big\}\Big) = 1.$$

2. (a) Eksponenttifunktio on selvästikin derivoituva, joten standardinormaalijakauman tiheysfunktion derivaatta on

$$\phi'(y) = \frac{d}{dy}\phi(y) = \frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\Big) = -y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} = -y\phi(y).$$

(b) Käytetään tehtävän vihje ylärajan arvion osoittamiseksi:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(G > x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}dy = -\int_x^\infty \frac{1}{y}\Big(-y\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\Big)dy = \int_\infty^x \frac{1}{y}\phi'(y)dy\\ &= \Big/_{\infty}^{x}\frac{1}{y}\phi(y) + \int_\infty^x \frac{1}{y^2}\phi(y)dy = \frac{1}{x}\phi(x) - \int_x^\infty \underbrace{\frac{1}{y^2}\phi(y)}_{\geq 0}dy \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

kaikilla $x > 0$.

3. (a) Käytettään tehtävän vihje:

$$D\log(x\log x) = \frac{1}{x\log x}D(x\log x) = \frac{1}{x\log x}(\log x + 1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x}$$

kaikilla $x > 0$. Integroidaan yhtälö puolittain ja laskemalla saadaan

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}dx = \lim_{t\to\infty}\Big/_{2}^{t}\log(x\log x) - \lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\Big/_{2}^{t}\log(\log x) = \infty.$$

(b) 1° Kun $\varepsilon > 0$, niin

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\log n} < \sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\log n} \leq \frac{1}{2\log 2} + \int_2^\infty\frac{1}{x\log x}dx = \infty$$

2° Kun $\varepsilon \le 0$, niin

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\log n} \ge \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \ge \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \infty$$

eli

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\log n} = \infty.$$

4. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tehtävän 2 yläraja-arvion ja satunnaismuuttujien $\{G_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ samoin jakautuneisuuden nojalla

$$\mathbb{P}(A_n^\varepsilon) = \mathbb{P}\Big(G > (1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}\Big) < \frac{1}{(1+\varepsilon)\sqrt{2\log n}\sqrt{2\pi}} e^{-(1+\varepsilon)^2 \log n} \le \frac{1}{n^{(1+\varepsilon)^2}\sqrt{\log n}}$$
$$\le \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log n}} \le \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\log n}$$

kaikilla $n \ge 2$. Tehtävän 3 nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) \le \mathbb{P}(A_1^\varepsilon) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}\log n} < \infty,$$

joten Borel-Cantellin lemman I (lemma 5.1.1) nojalla

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) \le 1\right\}\right) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} (A_n^\varepsilon)^c\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n^\varepsilon\Big)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\limsup_n A_n^\varepsilon) = 1 - 0 = 1.$$

5. Merkitään $\psi(x) = x^{-1}\phi(x)$. Analyysin peruslauseen nojalla

$$x^{-1}\phi(x) = \psi(+\infty) - \int_x^{\infty} \psi'(y)dy = -\int_x^{\infty} \Big(-\frac{1}{y^2}\phi(y) - \frac{1}{y}\cdot y\phi(y)\Big)dy$$
$$= \int_x^{\infty} \Big(\frac{1}{y^2}+1\Big)\phi(y)dy \le \int_x^{\infty} \Big(\frac{1}{x^2}+1\Big)\phi(y)dy = (x^{-2}+1)\int_x^{\infty}\phi(y)dy,$$

mistä seuraa alaraja-arvion

$$\mathbb{P}(G > x) = \int_x^{\infty} \phi(y)dy \ge \frac{x}{x^2+1}\phi(x)$$

kaikilla $x > 0$.

6. Osoitetaan väite:

$$P\left(\left\{\omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) \ge 1\right\}\right) = 1.$$

Tämän väitteen osoittamiseksi riittää tarkastella, kun ε on pieni eli $0 < \varepsilon < 1$.

Oletuksen mukaan satunnaismuuttujat $\{G_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ ovat riippumattomia, joten määritelty tapahtumat $\{A_n^{-\varepsilon}\}$ ovat riippumattomia. Tehtävän 5 alaraja-arvion ja satunnaismuutujien $\{G_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}$ samoin jakautuneisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n^{-\varepsilon}) &= \mathbb{P}\Big(G > (1-\varepsilon)\sqrt{2\log n}\Big)\\ &\geq \frac{(1-\varepsilon)\sqrt{2\log n}}{(1-\varepsilon)^2 \cdot 2\log n + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1-\varepsilon)^2 \log n}\\ &\geq \frac{1}{n^{(1-\varepsilon)^2} \log n},\end{aligned}$$

kun $n \geq n_0$ ja n_0 on riittävän suuri. Selvästikin $p \doteq (1-\varepsilon)^2 \leq 1$, joten tehtävän 3 nojalla

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^{-\varepsilon}) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^{-\varepsilon}) \geq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^p \log n} = \infty.$$

Borel-Cantellin lemman II (lemma 5.1.3) nojalla

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) \geq 1\right\}\right) \quad = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n^{-\varepsilon}\Big) = \mathbb{P}(\limsup_n A_n^{-\varepsilon}) = 1.$$

Nyt osoitetusta väitteestä ja tehtävän 4 tiedon nojalla seuraavat, että

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left\{\omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) = 1\right\}\right)\\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\left\{\omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) > 1\right\}\right) - \mathbb{P}\left(\left\{\omega :\ \limsup_n \left(\frac{G_n(\omega)}{\sqrt{2\log n}}\right) < 1\right\}\right)\\ &= 1 - 0 - 0\\ &= 1.\end{aligned}$$