Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 5, 11.10.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. (a) Lasketaan tehtävän vihjeen tai vektorianalyysin kurssin tietojen avulla:

$$\begin{aligned}
\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\Big)^2 &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\Big)dy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \\
&= \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} \int_{0}^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}[\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)]} J(\theta, r) d\theta dr \\
&= 2\pi \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} re^{-\frac{r^2}{2}} \\
&= -2\pi \lim_{R\to\infty} \Big/_{0}^{R} e^{-\frac{r^2}{2}} \\
&= 2\pi,
\end{aligned}$$

missä Jakobian matriisin determinantti $J(\theta, r) = |\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{dr} - \frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta}| = r$.

(b) Kohdan (a) tuloksen perusteella todetaan, että määritelty funktio $\Phi(x)$ on kertymäfunktio, joten harjoituksen 4 tehtävän 6 nojalla on olemassa yksikäsitteinen todennäköisyysmitta $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ siten, että

$$\mathbb{P}((-\infty, x)) = \Phi(x).$$

Valitsemalla satunnaismuuttujaksi $G(z) = z$ huomataan, että

$$\mathbb{P}(G \le x) = \mathbb{P}_G((-\infty, x]) = \mathbb{P}(G^{-1}(-\infty, x]) = \mathbb{P}((-\infty, x]) = \Phi(x).$$

On siis olemassa todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja satunnaismuuttuja G siten, että

$$\mathbb{P}(G \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \tag{1}$$

(c) Koska satunnaismuuttujan G jakauman kertymäfunktio Φ on derivoituva (Analyysi I), niin sen tiheysfunktio on kertymäfunktion derivaatta (s.53):

$$\varphi(x) \doteq \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Satunnaismuuttujalla G on siis jatkuva tiheysfunktio φ. Sanomme tässä tapauksesssa, että se noudattaa *standardi normaalijakauman* ja merkitsemme $G \sim N(0,1)$.

Huomautus. Itse asiassa kaavassa (1) pätee yleisesti kaikilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}_G(B) = \int_B \varphi(y)dy.$$

Tämä seuraa Caratheodoryn laajennuslauseesta (teoreema 2.1.1) ja mitan laajennuksen yksikäsitteisyyslauseesta (lause 2.1.1). Sanotaan myös tässä, että Radon-Nikodymin derivaatta on G:n jakauman tiheysfunktio:

$$\frac{d\mathbb{P}_G}{dx} = \varphi.$$

Tiheysfunktio tulisi täten toteuttaa ehdot:

(tf1) $f(x) \geq 0$ melkein kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
(tf2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$.

2. (a) Tehtävässä oletetaan, että $G \sim N(0,1)$. Määritetään satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F_X:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(m + \sigma G \leq x) = \mathbb{P}\Big(G \leq \frac{x-m}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big).$$

(b) Kertymäfunktio $\Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big)$ on selvästikin derivoituva, joten satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\Phi\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big) = \Phi'\Big(\frac{x-m}{\sigma}\Big) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Yleisesti jos satunnaismuuttujalla X on yllä oleva jatkuva tiheysfunktio, sanomme että satunnaismuuttuja X noudattaa normaalijakaumaa parametrein m ja $\sigma^2 > 0$. Merkitsemme $X \sim N(m, \sigma^2)$.

(c) Kohdan (b) ja mitan vaihtokaavan nojalla

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \underbrace{f_X(x)}_{\geq 0} dx = \int_A f_X(x) \frac{dx}{d\mathbb{P}_G} d\mathbb{P}_G = \int_A f_X(x)\varphi^{-1}(x) d\mathbb{P}_G$$

kaikilla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Teoreeman 4.2.3 nojalla kysytty Radon-Nikodymin derivaatta on

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\mathbb{P}_G}(x) = f_X(x)\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sqrt{2\pi} e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2}{2}}.$$

3. (a) Määritetään satunnaismuuttujan G momentti generoiva funktio M_G mitan vaihtokaavan avulla:

$$M_G(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda G}) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{e^{\lambda x}}_{\geq 0} d\mathbb{P}_G(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{2}} dx$$

$$\overset{y=x-\lambda}{=} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{=1} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Satunnaismuuttujan $X = m + \sigma G$ momentti generoiva funktio on (a) kohdan nojalla:

$$M_X(\lambda) = \mathbb{E}(e^{\lambda X}) = e^{\lambda m}\mathbb{E}(e^{\lambda \sigma G}) = e^{\lambda m} M_G(\lambda\sigma) = e^{\lambda m} \cdot e^{\frac{(\lambda\sigma)^2}{2}} = e^{\lambda m + \frac{1}{2}m^2\lambda^2}$$

kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Näytetään, että Riemannin zeta funktio ζ on hyvin määritelty kaikilla $s > 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{-s} \leq 1 + \lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-s} dx = 1 + \frac{1}{-s+1} \lim_{t\to\infty} \Big/_{1}^{t} x^{-s+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{s-1} < \infty.$$

Tästä seuraa, että voidaan määritellä todennköisyysmitta $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$ todennäköisyysavaruudessa $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.Oletetaan jatkossa, että $s > 1$.

Huomataan lisäksi, että tapahtuman $k\mathbb{N} = \{k, 2k, 3k, \dots\}$ todennäköisyys on

$$\mathbb{P}(k\mathbb{N}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{nk\}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(\{nk\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(nk)^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{k^{-s}}{\zeta(s)} \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = \frac{k^{-s}}{\zeta(s)} \cdot \zeta(s)$$

$$= k^{-s} \tag{2}$$

kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

(a) Olkoon alkuluku $p > 1$. Kaikki luonnolliset luvut, jotka ovat jaollisia alkuluvulla p, muosdostavat joukon $E_p = p\mathbb{N} = \{p, 2p, 3p, \dots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Tämän tapahtuman todennäköisyys on tiedon (2) nojalla

$$\mathbb{P}(E_p) = \mathbb{P}(p\mathbb{N}) = p^{-s}$$

(b) Olkoot mielivaltaisia alkulukuja $p_1, p_2, \dots, p_k \in P$, missä $k \in \mathbb{N}$. Osoitetaan, että tapahtumat $E_{p_1}, E_{p_2}, \dots, E_{p_k}$ ovat riippumattomia. Havaitaan, että lunnollinen luku

n on jaollinen kaikilla alkuluvuilla $p_1, p_2, \ldots, p_k$ täsmälleen silloin, kun on olemassa luonnollinen luku $q \in \mathbb{N}$ siten, että $n = p_1 p_2 \cdots p_k q$. Siispä

$$\bigcap_{i=1}^{k} E_{p_i} = p_1 p_2 \cdots p_k \mathbb{N},$$

joten tiedon (2) nojalla

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I_k} E_{p_i}) = \mathbb{P}(p_1 p_2 \cdots p_k \mathbb{N}) = (p_1 p_2 \cdots p_k)^{-s} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{-s} = \prod_{i\in I_k} \mathbb{P}(E_{p_i}).$$

Koska tämä pätee kaikille indeksijoukoille I_k, tapahtumat $(E_p : p \text{ on alkuluku})$ ovat riippumattomia (kts. s.43).

(c) Selvästikin

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1^{-s}}{\zeta(s)} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Osoitetaan väitteen jälkimmäisen yhtäsuurus. Algebran I ja lukuteorian kursilla käyty Arimetiikan peruslauseen nojalla jokainen luonnollinen luku $n > 1$ voidaan esittää alkulukujen tulona:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_k. \tag{3}$$

Tästä seuraa, että kaikilla $n > 1$ on olemassa alkuluku $p_k \in P$ siten, että $n \in p_k \mathbb{N} = E_{p_k}$. Siis

$$\{1\} \cup \Big(\bigcup_{p\in P} E_p\Big) = \mathbb{N},$$

joten (a) ja (b) kohtien sekä vasta tapahtumien riippumattomuuksien nojalla

$$\mathbb{P}(\{1\}) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p\in P} E_p\Big) = 1 - [1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in P} E_p^c\Big)] = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in P} E_p^c\Big)$$
$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{p\in P} \mathbb{P}(E_p^c) = \prod_{p\in P}(1 - \mathbb{P}(E_p)) = \prod_{p\in P}(1 - p^{-s}).$$

Huomautus. Eulerin kaavassa pätee kaikilla $s > 1$:

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p\in P}(1 - p^{-s}). \tag{4}$$

(d) Sevästikin $pq\mathbb{N} \subset p\mathbb{N}$, joten tiedon (2) nojalla

$$\mathbb{P}(pq\mathbb{N} \mid p\mathbb{N}) = \frac{\mathbb{P}(pq\mathbb{N} \cap p\mathbb{N})}{\mathbb{P}(p\mathbb{N})} = \frac{\mathbb{P}(pq\mathbb{N})}{\mathbb{P}(p\mathbb{N})} = \frac{(pq)^{-s}}{p^{-s}} = q^{-s} = \mathbb{P}(q\mathbb{N}).$$

(e) Olkoon kysytty tapahtuma A. Tällöin sen vastatapahtuma on

$$A^c = \{X \text{ on jaollinen } k^2 \text{ jollain } k > 1\} = \bigcup_{k=2}^{\infty} k^2\mathbb{N}.$$

Selvästikin

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} k^2\mathbb{N} \supset \bigcup_{p\in P} p^2\mathbb{N} = \bigcup_{p\in P} E_{p^2}.$$

Toisaalta tiedon (3) nojalla $\bigcup_{k=2}^{\infty} k^2\mathbb{N} \subset \bigcup_{p\in P} E_{p^2}$. Siis

$$A^c = \bigcup_{p\in P} E_{p^2}.$$

Korvaamalla (b)-kohdassa p_i:n tilalle p_i^2 todetaan samoin, että tapahtumat $\{E_{p^2}\}_{p\in P}$ ovat riippumattomia, ja täten myös $\{E_{p^2}^c\}_{p\in P}$ ovat riippumattomia. Laskemalla nyt kuten (c)-kohdassa ja käyttämällä tietoa (4), saadaan kysytty tapahtuman A todennäköisyydeksi

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{p\in P} E_{p^2}\Big) = 1 - [1 - \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in P} E_{p^2}^c\Big)] = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in P} E_{p^2}^c\Big)$$
$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{p\in P} \mathbb{P}(E_{p^2}^c) = \prod_{p\in P}(1 - \mathbb{P}(E_{p^2})) = \prod_{p\in P}(1 - p^{-2s}) = \frac{1}{\zeta(2s)}.$$

(f) Palautetaan mieleen, että suurin yhteinen jakaja tarkoittaa sama asia kuin suurin yhteinen tekijä eli $R = syt(X, Y)$. Kun $n = 1$, niin satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuuksien, vasta tapahtumien riippumattomuuksien, tiedon (2) ja Eulerin kaavan (4) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R = 1) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=2}^{\infty}\{R = n\}\Big) \\
&= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=2}^{\infty}\{X \in n\mathbb{N}\} \cap \{Y \in n\mathbb{N}\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in P}^{\infty} (\{X \in \ p\mathbb{N}\} \cap \{Y \in p\mathbb{N}\})^c\Big) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{p\in P} \mathbb{P}\Big((\{X \in \ p\mathbb{N}\} \cap \{Y \in p\mathbb{N}\})^c\Big) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{p\in P} \Big(1 - \mathbb{P}(\{X \in \ p\mathbb{N}\})\mathbb{P} \cap \{Y \in p\mathbb{N}\}\Big)\Big) \\
&= \prod_{p\in P}(1 - p^{-s} \cdot p^{-s}) \\
&= \frac{1}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$

Todettakoon vielä, että lukujen X ja Y suurin yhteinen tekijä on yksi täsmälleen silloin, kun kummallakaan luvulla ei ole yhteistä tekijänä alkulukua eli

$$\{syt(X,Y)=1\} = \bigcap_{p\in P}^{\infty} \big(\{X \in\ p\mathbb{N}\} \cap \{Y \in p\mathbb{N}\}\big)^c.$$

Yleisesti olkoon $n \in \mathbb{N}$. Kuten edellä satunnaismuuttujien X ja Y riippumattomuuksien, vasta tapahtumien riippumattomuuksien, tiedon (2) ja Eulerin kaavan (4) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R=n) &= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{p\in P} \big(\{X/n \in E_p\} \cap \{Y/n \in E_p\}\big)^c \cap \{X \in n\mathbb{N}\} \cap \{Y \in n\mathbb{N}\}\Big) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{p\in P} \mathbb{P}(\big(\{X/n \in E_p\} \cap \{Y/n \in E_p\}\big)^c)\mathbb{P}(X \in n\mathbb{N})\mathbb{P}(Y \in n\mathbb{N}) \\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{p\in P} \Big(1 - \mathbb{P}(X/n \in E_p)\mathbb{P}(Y/n \in E_p)\Big)\mathbb{P}(X \in n\mathbb{N})\mathbb{P}(Y \in n\mathbb{N}) \\
&= \prod_{p\in P} (1 - p^{-s}p^{-s})n^{-s}n^{-s} \\
&= \frac{n^{-2s}}{\zeta(2s)}.
\end{aligned}$$