Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 4, 01.10.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. Olkoot $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Merkitään $C_1 = A_1$ ja $C_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i = A_n \setminus B_n$ kaikilla $n \geq 1$. Tällöin joukot $C_1, C_2, \ldots$ ovat erillisiä. Todennäköisyysmitan σ-additiivisuuden nojalla
$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n \setminus B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(B_n))}_{\leq \mathbb{P}(A_n)} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

2. Olkoon $q \in \mathbb{Q}$. Jos $\overleftarrow{F}(q) = \sup\{x : F(x) \leq q\} = \infty$, niin funktion F kasvavuuden nojalla $F(x) \leq q$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten
$$\{x : F(x) \leq q\} = \mathbb{R}.$$
Oletetaan, että $\overleftarrow{F}(q) < \infty$. Tällöin suoraan yleistetyn käänteiskuvauksen $\overleftarrow{F}$ määritelmästä seuraa, että
$$\big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big) \subset \{x : F(x) \leq q\} \subset \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big].$$
On vain kahta tapausta funktio on joko vasemmalta jatkuva kohdassa $\overleftarrow{F}(q)$ tai sitten ei:
   1° F on vasemmalta jatkuva kohdassa $\overleftarrow{F}(q)$: Olkoon $t \leq \overleftarrow{F}(q)$. Tällöin funktion F kasvavuuden ja yleistetyn käänteiskuvauksen määritelmästä seuraa, että
$$F(t) \leq F(\overleftarrow{F}(q)) \leq q$$
   eli $t \in \{x : F(x) \leq q\}$. Tässä tapauksessa saadaan siis
$$\{x : F(x) \leq q\} = \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big].$$
   2° F ei ole vasemmalta jatkuva kohdassa $\overleftarrow{F}(q)$: Olkoon $t \in \{x : F(x) \leq q\}$. Selvästikin $t \leq \overleftarrow{F}(q)$. Merkitään $x_0 = \overleftarrow{F}(q)$. Tällöin oletuksen nojalla
$$F(t) \leq \lim_{x\to x_0-} F(x) < F(x_0) = F(\overleftarrow{F}(q)).$$
   On siis oltava $t < \overleftarrow{F}(q)$, sillä muuten päädytään ristiriitaan. Saadaan siis
$$\{x : F(x) \leq q\} = \big(-\infty, \overleftarrow{F}(q)\big).$$
Osoitettiin, että joukko $\{x : F(x) \leq q\}$ on aina avoin - tai puoliavoin väli kaikilla $q \in \mathbb{Q}$. Siispä $\{x : F(x) \leq q\} \in \mathcal{B}$ kaikilla $q \in \mathbb{Q}$. Osoitetaan, että kyseinen ehto riittää Borel mitallisuuteen:
$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq y\} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}\cap(y,\infty)} \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : F(x) \leq q\}}_{\in\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Siis kasvava funktio F on Borel-mitallinen (kts. luentomoniste s.39).

3. Tehtävän 2 nojalla kasvava funktio h on Borel-funktio, joten $h(X)$ on satunnaismuuttuja. Selvästikin $h(X) \geq 0$, joten tehtävän vihjeen nojalla
$$\mathbb{E}(h(X)) \geq \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq t\}} h(X)) \geq h(t)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{X \geq t\}}) = h(t)\mathbb{P}(X \geq t)$$
kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Erityisesti, kun $h(t) > 0$, niin
$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(h(X))}{h(t)}.$$

4. (*Kasvavuus*:) Olkoon $s \leq t$. Selvästikin $]-\infty, s] \subset]-\infty, t]$, joten todennäköisyysmitan monotonisuuden nojalla
$$F(s) = \mathbb{P}(X \leq s) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = F(t).$$

(*Oikealta jatkuvuus:*) Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja mielivaltainen vähenevä jono $\{t_n\}$ siten, että $t_n \downarrow t$. Tällöin $A_n = \{X \leq t_n\} \downarrow \{X \leq t\} = A$. Merkitään $B_n = A_n \setminus A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Selvästikin $B_n \downarrow \emptyset$, joten harjoituksen 2 tehtävän 1 nojalla
$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A)),$$
joten
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A). \tag{1}$$
Tästä seuraa, että
$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) = F(t).$$
Siis F on oikealta jatkuva.

Huomautus! Itse asiassa olemme yleistäneet harjoituksen 2 tehtävän 1 tuloksen eli osoittaneet kohdassa (1) todennäköisyysmitan monotonisen jatkuvuuden: ”Jos $A_n \downarrow A$, niin $\mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)$.” Tästä seuraa helposti toisen tuloksen: ”Jos $A_n \uparrow A$, niin $\mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)$.”

(*Raja-arvot äärettömyydessä:*) Kuten edellä valitaan jonoksi $t_n = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin $A_n \uparrow \Omega$ ja $B_n = \Omega \setminus A_n \downarrow \emptyset$, joten
$$F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$
Valitaan jonoksi $s_n = -n$. Selvästikin $C_n =]-\infty, s_n] \downarrow \emptyset$, joten taas harjoituksen 2 tehtävän 1 nojalla
$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(s_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

5. (a) Osoitetaan, että määritelty funktio F toteuttaa kertymäfunktion ehdot:

(KF1) Olkoon $t \geq s$. Jos $s \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, niin selvästikin $F(s) = F(t)$. Olkoon $s \in (0,1)$. Tällöin on olemassa $m \in \mathbb{N}$ siten, että $t \geq \frac{1}{m} \geq s$. Tästä seuraa, että

$$F(t) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \mathbf{1}_{\{t \geq \frac{1}{n}\}} + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^m} \geq \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{\{s \geq \frac{1}{n}\}} = F(s).$$

(KF2) Koska yksinkertaiset funktiot $\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}$ ovat oikealta jatkuvia kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin

$$\begin{aligned} F(t+) &= \lim_{s \to t+} F(s) = \lim_{s \to t+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \lim_{s \to t+} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}(s) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}(t) = F(t) \end{aligned}$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$.

(KF3) Jos $t \leq 0$, niin $\mathbf{1}_{\{t \geq \frac{1}{n}\}} = 0$. Siis $F(t) = 0$ kaikilla $t \leq 0$. Tästä seuraa, että

$$F(-\infty) = \lim_{t \to -\infty} F(t) = \lim_{t \to -\infty} 0 = 0.$$

Vastaavasti

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/2} = 1$$

kaikilla $t \geq 1$, joten

$$F(\infty) = \lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{t \to \infty} 1 = 1.$$

(b) Selvästkin $A_3 = \{0\} \subset (-\infty, 0) \subset (-\infty, 0]$, joten todennäköisyysmitan monotonisuuden nojalla

$$0 \leq \mathbb{P}(A_3) \leq \mathbb{P}((-\infty, 0)) \leq \mathbb{P}((-\infty, 0]) = F(0) = 0.$$

Epäyhtälöistä seuraavat, että $\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_5) = 0$.

Samoin

$$\mathbb{P}(A_6) = 1 - \mathbb{P}(A_6^c) = 1 - F(0) = 1 - 0 = 1.$$

Osoitetaan ensin yleisen tuloksen, jolloin saadaan laskettu helposti loput tapahtumien A_1, A_2 ja A_4 todennäköisyydet. Merkitään $B_i = (-\infty, \frac{1}{m} - \frac{1}{i}]$. Tällöin $B_i \uparrow (-\infty, \frac{1}{m})$, joten monotonisen jatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([\tfrac{1}{m}, \infty)) &= 1 - \mathbb{P}((-\infty, \tfrac{1}{m})) = 1 - \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(B_i) \\ &= 1 - \lim_{i\to\infty} F\Big(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{i}\Big).\end{aligned}$$

Koska $\frac{1}{m} - \frac{1}{i} < \frac{1}{m}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$ ja karakteristinen funktio $\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}$ on jatkuva alueessa $(\frac{1}{m+1}, \infty)$ kaikilla $n \geq m+1$, niin

$$\begin{aligned}\lim_{i\to\infty} F(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{i}) &= 1 - \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{i}) \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \lim_{i\to\infty} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}(\tfrac{1}{m} - \tfrac{1}{i}) \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = 1 - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Siis

$$\mathbb{P}([\tfrac{1}{m}, \infty)) = 1 - \lim_{i\to\infty} F(1 - \tfrac{1}{i}) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^m}$$

kaikilla $m \in \mathbb{N}$. Nyt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1) &= \mathbb{P}([1, \infty)) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}([\tfrac{1}{10}, \infty)) = 1 - \frac{1}{2^{10}} \ (\approx 1) \\ \mathbb{P}(A_4) &= \mathbb{P}([0, \tfrac{1}{2})) = 1 - \Big(\mathbb{P}((-\infty, 0)) + \mathbb{P}([\tfrac{1}{2}, \infty))\Big) \\ &= 1 - \Big(\underbrace{\mathbb{P}(A_5)}_{=0} + 1 - \frac{1}{2^2}\Big) = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(c) Identiteetti kuvaus on tunnetusti jatkuva, joten se on Borel-funktio. Siispä identiteetti kuvaus X on satunnaismuuttuja. Koska

$$\mathbb{P}\big((0,1]\big) = F(1) - F(0) = 1 - 0 = 1$$

ja kuvaus X ja F ovat kasvavia, niin satunnaismuuttujan X odotusarvo on luennolla käsitelty Riemann-Stieljtjesin intgraalin (s. 43) nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 X(t)dF(t) = \Big/_{0}^{1} X(t)F(t) - \int_0^1 F(t)dX(t) \\
&= F(1) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{2^n}\mathbf{1}_{[\frac{1}{n},\infty)}(t)dt = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\frac{1}{n}}^1 dt \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}(1 - \frac{1}{n}) = 1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.
\end{aligned}$$

Odotusarvo on olemassa, sillä kyseinen sarja suppenee ts. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} < 1$.

6. (a) (*Kasvavuus koordinaattien suhteen:*) Olkoon $1 \le i \le d$ ja $x \le y$. Tällöin $\{X_i \le x\} \subset \{X_i \le y\}$, joten

$$\bigcap_{1 \le j \le d, j \ne i} \{X_j \le t_j\} \cap \{X_i \le x\} \subset \bigcap_{1 \le j \le d, j \ne i} \{X_j \le t_j\} \cap \{X_i \le y\}.$$

Todennäköisyysmitan motonotonisuuden nojalla

$$\begin{aligned}
F(t_1, \dots, x, \dots, t_d) &= \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \dots, X_i \le x, \dots, X_d \le t_d) \\
&\le \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \dots, X_i \le y, \dots, X_d \le t_d) = F(t_1, \dots, y, \dots, t_d).
\end{aligned}$$

(*Oikealta jatkuvuus koordinaattien suhteen:*) Olkoon $1 \le i \le d$, $x \in \mathbb{R}$ ja mielivaltainen vähenevä jono $\{x_n\}$ siten, että $x_n \downarrow x$. Tällöin $\{X_i \le x_n\} \downarrow \{X_i \le x\}$, joten myös

$$A_n = \bigcap_{1 \le j \le d, j \ne i} \{X_j \le t_j\} \cap \{X_i \le x_n\} \downarrow \bigcap_{1 \le j \le d, j \ne i} \{X_j \le t_j\} \cap \{X_i \le x\}$$

Todennäköisyysmitan monotonisen jatkuvuuden nojalla

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} F(t_1, \dots, x_n, \dots, t_d) &= \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_1 \le t_1, \dots, X_i \le x, \dots, X_d \le t_d) \\
&= F(t_1, \dots, x, \dots, t_d).
\end{aligned}$$

Siis F on oikealta jatkuva jokaisen koordinaatin i suhteen.

(*Raja-arvot äärettömyydessä:*) Selvästikin $\{X_i \le -n\} \downarrow \emptyset$, joten myös

$$A_n = \bigcap_{1\le j\le d, j\ne i} \{X_j \le t_j\} \cap \{X_i \le -n\} \downarrow \emptyset.$$

Monotonisen jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{x\to-\infty} F(t_1,\dots,x,\dots,t_d) = \lim_{n\to\infty} F(t_1,\dots,-n,\dots,t_d) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Selvästikin $\{X_i \le n\} \uparrow \{X_i \in \mathbb{R}\} = \Omega$ kaikilla $1 \le i \le d$, joten myös

$$A_n = \bigcap_{1\le i\le d} \{X_i \le n\} \uparrow \bigcap_{1\le i\le d} \Omega = \Omega.$$

Monotonisen jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{t_1\to\infty, t_2\to\infty,\dots,t_d\to\infty} F(t_1,\dots,t_d) = \lim_{n\to\infty} F(n,n,\dots,n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

(b) Todetaan heti alussa, että harjoituksen 2 tehtävän 2 tulos pätee yleisesti toisin sanoen joukko kokoelma $\mathcal{E}_0^d \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ on algebra kaikilla $d \in \mathbb{N}$. Tarkastellaan tapausta $d = 2$, sillä yleinen tapaus seuraa samalla idealla. Kun $d = 2$, niin

$$\mathcal{A} \doteq \mathcal{E}_0^2 = \Big\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] \times (c_i, d_i] \mid a_i \le b_i, c_i \le d_i;\ i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Määritellään kuvaus $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ kaavalla

$$\mathbb{P}_0(A) = \sum_{i=1}^n \Big([F(b_i, d_i) - F(b_i, c_i)] - [F(a_i, d_i) - F(a_i, c_i)] \Big),$$

kaikilla $A \in \mathcal{A}$. Kuvaus $\mathbb{P}_0$ on hyvin määritelty, sillä se ei riipu joukon A esityksestä. Teoreeman 2.1.1 eli Caratheodoryn laajennuslauseen mukaan kuvaus $\mathbb{P}_0$ voidaan laajentaa todennäköisyymitaksi silloin, kun kuvaus $\mathbb{P}_0$ on σ-additiivinen algebralle $\mathcal{A}$. Koska harjoituksen 2 tehtävän 1 tulos pätee myös algebralle, riittää osoittaa, että kaikilla algebran $\mathcal{A}$ laskevalle jonoille pätee:

$$A_n \downarrow \emptyset \Longrightarrow \mathbb{P}_0(A_n) \downarrow\ 0. \tag{2}$$

Tehdään vastaoletus ominaisuus (2) ei päde ts. on olemassa laskeva jono $\{A_n\}$ ja $\epsilon > 0$ siten, että $A_n \downarrow \emptyset$ ja $\mathbb{P}(A_n) \ge \epsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa joukko $B_n \in \mathcal{A}$ siten, että $B_n \subset A_n$ ja $\mathbb{P}(A_n \setminus B_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$ (2&3/HJ3). Tehtävän 1 ja jonon $\{A_n\}$ laskevuuden nojalla

$$\mathbb{P}\Big(A_n \cap (\bigcap_{i=1}^n B_i)^c\Big) \le \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_n \cap B_i^c) \le \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{2^{i+1}} \le \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Tästä seuraa, että

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^n B_i\Big) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}\Big(A_n \cap (\bigcap_{i=1}^n B_i)^c\Big) \ge \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} > 0$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. On siis oltava $\bigcap_{i=1}^n B_i \neq \emptyset$, joten myös $C_n \doteq \bigcap_{i=1}^n \overline{B}_i \neq \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Joukko C_n on selvätikin avaruuden $\mathbb{R}^2$ rajoitettu ja suljettu osajoukko, joten se on kompakti (Topologia I). Olkoon $c_n \in C_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska jono $\{c_n\}$ on kompakti metrisessä avaruudessa $C_1 \subset \mathbb{R}^2$, ja tunnetusti kompakti avaruuden jonolla on on suppeneva osajono, niin on olemassa $c \in \mathbb{R}^2$ siten, että

$$c_{n_j} \to c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Tämähän tarkoittaa sitä, että $c \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, mikä on ristiriita. Siis kuvaus P_0 on σ-additiivinen. *Caratheodoryn laajennuslauseen* (teoreema 2.1.1) nojalla on olemassa todennäköisyysmitta $\mathbb{P} : \sigma(\mathcal{A}) \to [0,1]$ siten, että $\mathbb{P}|\mathcal{A} = \mathbb{P}_0$. Valitsemalla $A = (-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2] \in \mathcal{A}$ nähdään, että

$$\mathbb{P}\big((-\infty, t]\big) \doteq \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_0(A) = \mathbb{P}_0\big((-\infty, t_1] \times (-\infty, t_2]\big) = F(t_1, t_2) \doteq F(t)$$

kaikilla $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Tämä todennäköisyysmitta on kaiken lisäksi yksikäsitteinen *mitan laajennuksen yksikäsitteisyyslauseen* (lause 2.1.1) nojalla, sillä algebra $\mathcal{A}$ on π-systeemi.