Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 3, 27.9.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. Selvästikin $\mathbb{P}^*(G) \leq \inf_{F\in\mathcal{F}:F\supseteq G} \mathbb{P}(F)$. Näytetään toinen suunta. Olkoon joukko $G \subseteq \Omega$ ja sen numeroituvan mitallinen peite $\{F_n\}$. Valitaan peitteeksi $F = \bigcup_{i=1}^n F_i \supseteq G$. Mitan subadditiivisuuden nojalla
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) \geq \mathbb{P}(F) \geq \inf_{F\in\mathcal{F}:F\supseteq G} \mathbb{P}(F).$$
Ottamalla infinumin yli kaikkien numeroituvien mitallisten peitteiden $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ yli saadaan
$$\mathbb{P}^*(G) \geq \inf_{F\in\mathcal{F}:F\supseteq G} \mathbb{P}(F).$$
Siis $\mathbb{P}^*(G) = \inf_{F\in\mathcal{F}:F\supseteq G} \mathbb{P}(F)$.

2. Tehtävän voi ratkaistaa vihjeen avulla. Sovelletaan kuitenkin tehtävän 1 tieto. Olkoon mielivaltainen joukko $G \subset \Omega$. Tehtävän yksi nojalla jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa mitallinen joukko $F_n \in \mathcal{F}$ siten, että $G \subset F_n$ ja
$$\mathbb{P}(F_n) \leq \mathbb{P}^*(G) + \frac{1}{n}.$$
Valitaan joukoksi $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Tällöin $G \subset F$ ja $F \in \mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$ on σ-algebra), joten
$$\mathbb{P}^*(G) \leq \mathbb{P}(F) \leq \mathbb{P}(F_n) \leq \mathbb{P}^*(G) + \frac{1}{n}$$
kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Antamalla $n \to \infty$, mistä seuraa $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}^*(G)$.

3. Olkoon $G \in \mathcal{L}$. Tehtävän 2 nojalla on olemassa joukko $F \in \mathcal{F}$ siten, että $F \subset G^c$ ja $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}^*(G^c)$. Valitaan joukoksi $E = F^c \supset G$. Koska $\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta ja joukko G on mitallinen, niin
$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F^c) = 1 - \mathbb{P}(F) = 1 - \mathbb{P}^*(G^c) = \mathbb{P}^*(G).$$

4. (" $\subset$ "). Olkoon $B \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$. Tällöin on olemassa joukot $A, C \in \mathcal{F}$ siten, että $A \subset B \subset C$ ja $\mathbb{P}(C \setminus A) = 0$. Koska $B \cap A^c \subset C \cap A^c \in \mathcal{F}$ ja $\mathbb{P}(C \cap A^c) = \mathbb{P}(C \setminus A) = 0$, niin $B \cap A^c \in \mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Selvästikin
$$B = B \cap (A \cup A^c) = A \cup (B \cap A^c) \in \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^{\mathbb{P}}),$$
joten $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} \subset \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^{\mathbb{P}})$.

(" $\supset$ "). Riittää osoittaa, että $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ on σ-algebra, joka sisältää joukot $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ ja $\mathcal{N}^{\mathbb{P}}$, mistä seuraa $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} \supset \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^{\mathbb{P}})$. Olkoon $B \in \mathcal{F}$. Tällöin valitsemalla joukoiksi $A = C = \Omega \in \mathcal{F}$ seuraa

$B \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$. Samoin nähdään $\mathcal{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$. Siis $\mathcal{F} \cup \mathcal{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$. Osoitetaan, että $\mathcal{F}^{\mathbb{P}}$ on σ-algebra:

($\sigma 1$) Koska $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$, niin $\Omega \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

($\sigma 2$) Olkoon $B \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$. Tällöin on olemassa joukot $A, C \in \mathcal{F}$ siten, että $A \subset B \subset C$ ja $\mathbb{P}(C \setminus A) = 0$. Tästä seuraa selvästikin $C^c \subset B^c \subset A^c$ ja

$$\mathbb{P}(A^c \setminus C^c) = \mathbb{P}(A^c \cap (C^c)^c) = \mathbb{P}(C \setminus A) = 0,$$

joten $B^c \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

($\sigma 3$) Olkoon $B_n \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Tällöin on olemassa joukot $A_n, C_n \in \mathcal{F}$ siten, että $A_n \subset B_n \subset C_n$ ja $\mathbb{P}(C_n \setminus A_n) = 0$. Selvästikin $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Merkitään $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Tällöin $C_n \cap A^c \in \mathcal{F}$ ja

$$0 \le \mathbb{P}(C_n \cap A^c) \le \mathbb{P}(C_n \cap A_n^c) = \mathbb{P}(C_n \setminus A_n) = 0$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$, mistä seuraa

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n \setminus A) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n \cap A^c)\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(C_n \cap A^c) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

Siis $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

5. (" $\subset$ "). Osoitetaan ensin, että $\mathcal{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathcal{L}$. Olkoon $A \in \mathcal{N}^{\mathbb{P}}$. Tällöin on olemassa joukko $B \in \mathcal{F}$ siten, että $A \subset B$ ja $\mathbb{P}(B) = 0$. Osoitetaan, että joukko A on mitallinen. Olkoon $G \subset \Omega$. Ulkomitan subadditiivisuuden nojalla

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^*(G) &= \mathbb{P}^*\Big((G \cap A) \cup (G \cap A^c)\Big) \le \mathbb{P}^*(G \cap A) + \mathbb{P}^*(G \cap A^c) \\ &\le \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}^*(G \cap A^c) = 0 + \mathbb{P}^*(G \cap A^c) = \mathbb{P}^*(G \cap A^c).\end{aligned}$$

Selvästikin $\mathbb{P}^*(G) \ge \mathbb{P}^*(G \cap A^c)$, joten

$$\mathbb{P}^*(G) = \mathbb{P}^*(G \cap A^c) = 0 + \mathbb{P}^*(G \cap A^c) = \mathbb{P}^*(G \cap A) + \mathbb{P}^*(G \cap A^c).$$

Siis A on mitallinen, joten $A \in \mathcal{L}$ eli $\mathcal{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathcal{L}$. Koska $\mathcal{L}$ on σ-algebra ja $\mathcal{F} \cup \mathcal{N}^{\mathbb{P}} \subset \mathcal{L}$, niin $\mathcal{F}^{\mathbb{P}} = \sigma(\mathcal{F}, \mathcal{N}^{\mathbb{P}}) \subset \mathcal{L}$.

(" $\supset$ "). Olkoon $A \in \mathcal{L}$. Tällöin tehtävän 2 ja 3 nojalla on olemassa joukot $E, F \in \mathcal{F}$ siten, että $E \subset G \subset F$ ja $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}^*(G)$. Koska $\mathbb{P}$ on todennäköisyysmitta, niin

$$\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E) = \mathbb{P}^*(G) - \mathbb{P}^*(G) = 0.$$

Siis $A \in \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$, joten $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}^{\mathbb{P}}$.

6. Merkitään topologia $\tau^d = \{U \subseteq \mathbb{R}^d : U \,\text{avoin}\,\}$ ja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\tau^d)$ sekä joukko kokokelmat:

$\mathcal{G}_1 = \big\{B(\mathbf{q}, n^{-1}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N}\big\}$,

$\mathcal{G}_2 = \{\overline{B(\mathbf{q}, n^{-1})} : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}^d, n \in \mathbb{N}\big\}$,

$\mathcal{G}_3 = \big\{B(q_1, 1/n_1) \times B(q_2, 1/n_2) \times \cdots \times B(q_d, 1/n_d) : q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}, n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}\big\}$,

$\mathcal{G}_4 = \big\{\overline{B(q_1, 1/n_1)} \times \overline{B(q_2, 1/n_2)} \times \cdots \times \overline{B(q_2, 1/n_d)} : q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}, n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}\big\}$.

(a) Selvästikin $\mathcal{G}_1 \subset \tau^d$, joten $\sigma(\mathcal{G}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Olkooon $U \in \tau^d$. Koska U on avoin, kaikilla $x \in U$ on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset U$. Joukon $\mathbb{Q}^d$ tiheyden nojalla kaikille $x \in U$ löytyy $\mathbf{q}_x \in U \cap \mathbb{Q}^d \subset \mathbb{Q}^d$ ja $n_{\mathbf{q}_x} \in \mathbb{N}$ siten, että $B(\mathbf{q}_x, \frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}}) \subset B(x, r)$. Joukko U voidaan täten esittää numeroituvan pallojen kokoelman yhdisteenä:

$$U = \bigcup_{\mathbf{q}_x \in U \cap \mathbb{Q}^d} B(\mathbf{q}_x, \frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}}) \in \sigma(\mathcal{G}_1),$$

joten $\tau^d \subset \sigma(\mathcal{G}_1)$. Tästä seuraa, että $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{G}_1)$. Siis $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{G}_1)$.

(b) Koska Borel-joukkojen kokoelma $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sisältää kaikki joukon $\mathbb{R}^d$ sujetut osajoukot, niin $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \sigma(\mathcal{G}_2)$. Havaitaan, että

$$B(\mathbf{q}, \frac{1}{n}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B(\mathbf{q}, n^{-1} - (n+i)^{-1})} \in \sigma(\mathcal{G}_2)$$

kaikilla $\mathbf{q} \in \mathbb{Q}^d$ ja $n \in \mathbb{N}$, joten $\mathcal{G}_1 \subset \sigma(\mathcal{G}_2)$. Tästä seuraa, että $\sigma(\mathcal{G}_1) \subset \sigma(\mathcal{G}_2)$.

(c) Selvästikin $\times_{i=1}^{d} B(q_i, 1/n_i) \in \tau^d$ kaikilla $q_i \in \mathbb{Q}$ ja $n_i \in \mathbb{N}$, joten $\sigma(\mathcal{G}_3) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Olkoon $U \in \tau^d$. Kohdan (a) nojalla kaikille $x \in U$ löytyy $\mathbf{q}_x = (q_x(1), q_x(2), \ldots, q_x(d)) \in U \cap \mathbb{Q}^d$ ja $n_{\mathbf{q}_x} \in \mathbb{N}$ siten, että

$$C(\mathbf{q}_x, n_{\mathbf{q}_x}) \doteq \times_{i=1}^{d} B(q_x(i), \frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}}) \subset B(x, r).$$

Geometrisesti tulkittuna jokaiselle $x \in U$ löytyy avoin kuutio $C(\mathbf{q}_x, n_{\mathbf{q}_x})$ siten, että $C(\mathbf{q}_x, n_{\mathbf{q}_x}) \subset U$. Nimittäin jos $y \in C(\mathbf{q}_x, n_{\mathbf{q}_x})$, niin

$$\begin{aligned} d(y, \mathbf{q}_x) &= \sqrt{(y_1 - q_x(1))^2 + (y_2 - q_x(2))^2 + \cdots + (y_d - q_x(d))^2} \\ &\leq \sqrt{(\frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}})^2 + (\frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}})^2 + \cdots + (\frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}})^2} = \frac{\sqrt{d}}{n_{\mathbf{q}_x}} < r, \end{aligned}$$

kun $n_{\mathbf{q}_x}$ on riittävän suuri. Avoin joukko U voidaan esittää numeroituvan avoin kuutioiden kokoelman yhdisteenä:

$$U = \bigcup_{\mathbf{q}_x \in U \cap \mathbb{Q}^d} C(\mathbf{q}_x, n_{\mathbf{q}_x}) = \bigcup_{\mathbf{q}_x \in U \cap \mathbb{Q}^d} \big(\times_{i=1}^{d} B(q_x(i), \frac{1}{n_{\mathbf{q}_x}})\big) \in \sigma(\mathcal{G}_3),$$

joten $\tau^d \subset \sigma(\mathcal{G}_3)$. Tästä seuraa, että $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subset \sigma(\mathcal{G}_3)$. Ollaan osoitettu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{G}_3)$.

(d) Tunnetusti topologian kurssilla suljettujen joukkojen karteesiset tulot on suljettu, joten $\sigma(\mathcal{G}_4) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Kohdan (b) nojalla

$$B(q, \frac{1}{n}) = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \overline{B(q, n^{-1} - k^{-1})},$$

kaikilla $q \in \mathbb{Q}$ ja $n \in \mathbb{N}$, joten

$$\begin{aligned}\times_{i=1}^d B(q_i, \frac{1}{n_i}) &= \times_{i=1}^d \bigcup_{k=n_i+1}^{\infty} \overline{B(q_i, n_i^{-1} - k^{-1})} \\ &= \bigcup_{k_d=n_d+1}^{\infty} \bigcup_{k_2=n_2+1}^{\infty} \cdots \bigcup_{k_1=n_1+1}^{\infty} \underbrace{\times_{i=1}^d \overline{B(q_i, n_i^{-1} - k_i^{-1})}}_{\in \mathcal{G}_4} \in \sigma(\mathcal{G}_4).\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{G}_3 \subset \sigma(\mathcal{G}_4)$, joten $\sigma(\mathcal{G}_3) \subset \sigma(\mathcal{G}_4)$. Kohdasta (c) seuraa $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{G}_4)$.

(e) Osoitetaan väite induktiolla. Väite pätee selvästikin arvolla $d = 1$. Tehdään induktio-oletus väite pätee arvolla $d \in \mathbb{N}$. Tällöin σ-algebran ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes(d+1)} &= \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \\ &\overset{\text{IO}}{=} \sigma(\tau^d) \otimes \sigma(\tau) \\ &= \Big(\sigma(\tau^d) \times \mathbb{R}\Big) \cap \Big(\big(\times_{i=1}^d \mathbb{R}\big) \times \sigma(\tau)\Big) \\ &= \sigma(\tau^d \times \mathbb{R}) \cap \sigma\Big(\big(\times_{i=1}^d \mathbb{R}\big) \times \tau\Big) \\ &= \sigma(\tau^d \times \mathbb{R}) \cap \Big(\big(\times_{i=1}^d \mathbb{R}\big) \times U\Big) \\ &= \sigma\Big(\tau^d \times \mathbb{R} \cap \big(\times_{i=1}^d \mathbb{R}\big) \times U\Big) \\ &= \sigma\Big(\tau^d \times \underbrace{U}_{\in \tau}\Big) \\ &= \sigma\Big(\tau^d \times \tau\Big) \\ &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1}).\end{aligned}$$

Huomautus. Tehtävän voi todistaa ensin tapaukselle, kun $d = 2$ ja sen jälkeen induktiolla! On selvä, että $\mathcal{G}_3 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$, mistä seuraa $\sigma(\mathcal{G}_3) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$. Riittää siis itse asiassa todistaa, että $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$.