Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyysteoria
Harjoitus 2, 20.9.2012
Ratkaisuehdotuksia (Hoa Ngo)

1. (" $\Rightarrow$ "). Olkoot joukot $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ siten, että $A_n \supset A_{n+1}$ kakilla $n \in \mathbb{N}$ ja $A_n \downarrow \emptyset$. Merkitään $B_k = A_k \setminus A_{k+1}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Selvästikin joukot $B_1, B_2, ... \in \mathcal{F}$ ovat erillisiä ja $A_n = \cup_{k=n}^{\infty} B_k$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Oletuksen nojalla kuvaus $\mathbb{P}$ on σ-additiivinen, joten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} B_k) = \mathbb{P}(A_1) < \infty.$$

Sarja siis suppenee, joten sarjan jäännöstermi suppenee kohti nollaan eli

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\cup_{k=n}^{\infty} B_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0.$$

(" $\Leftarrow$ "). Olkoot erilliset joukot $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$. Merkitään $B_k = \cup_{n=1}^{k} A_n$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $B = \lim B_k = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Kuvauksen $\mathbb{P}$ additiivisuuden ominaisuuden nojalla

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mathbb{P}\big((B \setminus B_k) \cup B_k\big) = \mathbb{P}(B \setminus B_k) + \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B \setminus B_k) + \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(A_n).$$

Selvästikin $B \setminus B_k \downarrow \emptyset$, joten oletuksen nojalla

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(B \setminus B_k) + \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(A_n) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Määritelmän (2.0.2) nojalla kuvaus $\mathbb{P}$ on σ-additiivinen.

2. Osoitetaan, että määritelty kuvaus $c : \mathcal{A} \to [0, 1]$ on ulkomitta tarkistamalla, että se toteuttaa ulkomitan määritelmän 2.1.5 ehdot:

(U1) $c(\emptyset) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \{Q(\emptyset)\} = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \{0\} = 0$.

(U2) Olkoot $A, B \in \mathcal{A}$ siten, että $A \subset B$. Tiedämme, että todennäköisyysmitta on monotoninen, joten $Q(A) \leq Q(B)$ kaikilla $Q \in \mathcal{Q}$. Tästä seuraa, että

$$c(A) = \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \{Q(A)\} \leq \sup_{Q\in\mathcal{Q}} \{Q(B)\} = c(B).$$

(U3) Olkoot $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$. Tällöin edelleen todennäisyysmitan monotonisuuden nojalla

$$Q\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n).$$

Ottamalla supremumin yli joukon $\mathcal{Q}$ saadaan

$$c\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c(A_n).$$

3. Osoitetaan, että kokoelma $\mathcal{E}_0$ on algebra (määritelmä 2.0.1):

(A_1) Selvästikin $\Omega =]-\infty, \infty]$, joten $\Omega \in \mathcal{E}_0$.

(A_2) Olkoon $E \in \mathcal{E}_0$. Tällöin $E = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$, missä $u_i \leq v_i \leq u_j \leq v_j$ kaikilla $i < j$. Osoitetaan induktiolla, että sen komplementti E^c on myös muotoa:

$$E^c = \bigcup_{i=1}^{m}(u_i, v_i],$$

missä $u_i \leq v_i \leq u_j \leq v_j$ kaikilla $i < j$ ja $m \in \mathbb{N}$. Havaitaan, että

$$(a_i, b_i]^c = (-\infty, a_i] \cup (b_i, \infty]$$

missä $i = 1, 2, ..., n$. Väite pätee selvästikin, kun $n = 1$. Tehdään induktio-oletus (IO) väite pätee arvolla $k \geq 2$. Osoitetaan, että väite pätee myös arvolla $k+1$:

$$\begin{aligned}
\Big(\bigcup_{i=1}^{k+1}(a_i, b_i]\Big)^c &= \Big(\bigcup_{i=1}^{k}(a_i, b_i]\Big)^c \cap (a_{k+1}, b_{k+1}]^c \\
&\overset{\text{(IO)}}{=} \Big(\bigcup_{i=1}^{m}(u_i, v_i]\Big) \cap (a_{k+1}, b_{k+1}]^c \\
&= \Big(\bigcup_{i=1}^{m}(u_i, v_i]\Big) \cap \Big((-\infty, a_{k+1}] \cup (b_{k+1}, \infty]\Big) \\
&= \Big(\bigcup_{i=1}^{m}(u_i, m_i]\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{m}(M_i, v_i]\Big),
\end{aligned}$$

missä $m_i = \min(v_i, a_{k+1})$ ja $M_i = \max(u_i, b_{k+1})$. Voidaan olettaa, että $(M_i, v_i] \neq \emptyset$ kaikilla $i \in I_m \doteq \{1, 2, ..., m\}$, sillä tyhjä joukot voidaan aina poista esityksestä. Havaitaan, että $u_i \leq u_m \leq b_k \leq a_{k+1}$, joten $u_i \leq m_i \leq M_i \leq v_i$ kaikilla $i \in I_m$. Tästä seuraa induktioväite. Olemme siis osoittaneet, että $E^c \in \mathcal{E}$, aina kun $E \in \mathcal{E}$.

(A_3) Olkoon $E, F \in \mathcal{E}_0$. Järjestämällä reaaliluvut suuruusjärjestykseen, saadaan esitys:

$$E \cup F = (u_1, v_1] \cup (u_2, v_2] \cup \cdots \cup (u_m, v_m],$$

mistä seuraa $E \cup F \in \mathcal{E}_0$.

4. Tiedämme summauksen järjestyksellä ei ole väliä, joten voimme asettaa:

$$\mathbb{P}_0(E) = \sum_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i) = \sum_{i \in I_n}(F(b_i) - F(a_i))$$

kaikilla $E \in \mathcal{E}_0$, missä indeksijoukko $I_n = \{1, 2, ..., n\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Kuvaus $\mathbb{P}_0$ on hyvin määritelty, sillä se ei riipu joukon E esityksestä. Funktion F ei-vähenevyyden ominaisuuksesta seuraa, että $\mathbb{P}_0(E) \geq 0$ kaikilla $E \in \mathcal{E}_0$. Osoitetaan, että kuvaus $\mathbb{P}_0 : \mathcal{E}_0 \to [0, \infty]$ on additiivinen:

(i) $\mathbb{P}_0(\emptyset) = \mathbb{P}_0((\infty, \infty]) = F(\infty) - F(\infty) = 1 - 1 = 0.$

(ii) Olkoot erilliset joukot $E, F \in \mathcal{E}_0$. Tällöin joukot ovat muotoa $E \doteq \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$ ja $F = \bigcup_{i=1}^{m}(c_i, d_i]$ Näiden joukkojen yhdiste on $E \cup F = \bigcup_{i=1}^{m+n}(a_i, b_i]$, missä välit $(a_i, b_i]$ ovat erillisiä. Siis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_0(E \cup F) &= \sum_{i \in I_{m+n}}(F(b_i) - F(a_i)) \\ &= \sum_{i \in I_n}(F(b_i) - F(a_i)) + \sum_{i \in I_m}(F(b_{n+i}) - F(a_{n+i})) \\ &= \sum_{i \in I_n}(F(b_i) - F(a_i)) + \sum_{i \in I_m}(F(d_i) - F(c_i)) \\ &= \mathbb{P}_0(E) + \mathbb{P}_0(F).\end{aligned}$$

σ-äärellisyys seuraa tästä induktiolla.

5. Olkoot $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$. Oletuksen nojalla kokoelma $\mathcal{A}$ on σ-algebra, joten myös $B_n \doteq \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ ja $C_n \doteq \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$. Näistä tiedoista seuraavat väitteet:

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A} \\ \liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Osoitetaan väitteet indikaattorifunktioille:

(1) Olkoon $\omega \in \Omega$. Tällöin indikaattorifunktion ominaiuuksien nojalla:

$$\mathbf{1}_{\limsup A_n}(\omega) = \mathbf{1}_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n}(\omega) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{\bigcup_{k\geq n} A_k}(\omega) = \lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\{\mathbf{1}_{A_k}(\omega)\} = \limsup \mathbf{1}_{A_n}(\omega).$$

(2) Havaitaan, että

$$(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c = \bigcap_{k=n}^{\infty} C_n^c = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c = \limsup_{n\to\infty} A_n^c.$$

Kohdan (1) tiedon nojalla:

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{(\liminf A_n)^c}(\omega) &= \mathbf{1}_{\limsup A_n^c}(\omega) = \limsup \mathbf{1}_{A_n{}^c}(\omega) = \limsup\{1-\mathbf{1}_{A_n}(\omega)\}\\ &= 1-\lim\Big(-\sup\{-\mathbf{1}_{A_n}(\omega)\}\Big) = 1-\liminf \mathbf{1}_{A_n}(\omega).\end{aligned}$$

Tästä seuraa toinen väite:

$$\mathbf{1}_{\liminf A_n}(\omega) = 1-\mathbf{1}_{(\liminf A_n)^c}(\omega) = 1-(1-\liminf \mathbf{1}_{A_n}(\omega)) = \liminf \mathbf{1}_{A_n}(\omega).$$

6. (a) Kokoelma $\mathcal{F}_n$ on σ-algebra, sillä mielivaltaisten (jonosta ω muodostettu) ”n-jonojen” joukkojen yhdiste on edelleen n-jonojen joukko.

(b) Osoitetaan ensin (tehtävän vihje): $U_{q,r}, V_{q,r} \in \mathcal{F}_\infty$ kaikilla $q < r \in \mathbb{Q}$, missä

$$\begin{aligned}U_{q,r} &= \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n \in [q,r)\}\\ V_{q,r} &= \{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} \overline{\omega}_n \in [q,r)\}\end{aligned}$$

ja $\overline{\omega}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \omega_i$ (otoskeskiarvo). Nähdään, että

$$U_{q,r} = \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n \geq q\} \cap \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n < r\} \doteq U_q \cap U_r$$

Tarkastellaan erikseen joukot U_q ja U_r:

(i)

$$\begin{aligned}U_r &= \{\omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n < r\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega : \sup_{k\geq n} \overline{\omega}_k \leq r - \frac{1}{n}\}\\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \underbrace{\{\omega \in\ \tilde{A}_k : \overline{\omega}_k \leq r - \frac{1}{n}\}}_{\in\mathcal{F}_k}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
U_q &= \{\omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n \geq q\} \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{\omega : \sup_{k\geq m} \overline{\omega}_k \geq q\} \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\omega : \sup_{k\geq m} \overline{\omega}_k > q - \frac{1}{n}\} \\
&= \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq m} \underbrace{\{\omega \in \ \tilde{A}_k : \overline{\omega}_k > q - \frac{1}{n}\}}_{\in\mathcal{F}_k},
\end{aligned}$$

Kohdista (i) ja (ii) seuraavat, että $U_q, U_r \in \mathcal{F}_\infty$, joten myös $U_{q,r} \in \mathcal{F}_\infty$. Samoin näytetään, että $V_{q,r} \in \mathcal{F}_\infty$.

Osoitetaan nyt $L \in \mathcal{F}_\infty$. Havaitaan, että

$$\omega \in L \iff \exists a \in \mathbb{R} : \limsup \overline{\omega}_n = a \quad \wedge \quad \liminf \overline{\omega}_n = a.$$

Tarkastellaan nämä kaksi tapaukset erikseen:

(1) Jono $\{\limsup \overline{\omega}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ on tunnetusti vähenevä, joten

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n = a \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies 0 \leq \limsup \overline{\omega}_n - a < \frac{1}{n} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Q} : q \leq a \leq \limsup \overline{\omega}_n < a + \frac{1}{n} < q + \frac{4}{n} + \frac{1}{n} = q + \frac{5}{n} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Q} : \omega \in \{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \overline{\omega}_n \in [q, q + \frac{5}{n})\} \doteq A_{q,r(n)}.
\end{aligned}$$

(2) Vastaavasti jonon $\{\liminf \overline{\omega}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kasvavuuden tiedosta seuraa:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \overline{\omega}_n = a \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Q} : q \leq \liminf \overline{\omega}_n < q + \frac{5}{n}. \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Q} : \omega \in \{\omega \in \Omega : \liminf_{n\to\infty} \overline{\omega}_n \in [q, q + \frac{5}{n})\} \doteq B_{q,r(n)}.
\end{aligned}$$

Kokoamalla kohdat (1) ja (2) saadaan:

$$L = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (A_{q,r(n)} \cap B_{q,r(n)}).$$

Koska $q < r(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin alkun nojalla $A_{q,r(n)}, B_{q,r(n)} \in \mathcal{F}_\infty$. Siis $L \in \mathcal{F}_\infty$. Osoitetaan lopuksi $L \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$. Valitaan jonoksi $\omega = (1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots)$. Selvästikin $\omega \in L$, mutta $\omega \notin A_n \subseteq \{0, 1\}^n$ millään $n \in \mathbb{N}$, joten $L \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.