HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 1 (13.9.2012)

1. Osoita:

$$\det \begin{pmatrix} (1-p_1) & -p_2 & \dots & -p_n \\ -p_1 & (1-p_2) & \dots & -p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_1 & -p_2 & \dots & (1-p_n) \end{pmatrix} = 1 - p_1 - p_2 - \dots - p_n$$

   Vihje: induktiolla tai lineaarialgebran Sylvesterin lemman avulla:

   Kun A ja B ovat $n \times m$ ja vastaavasti $m \times n$-matriiseja,

$$\det(Id_n + AB) = \det(Id_m + BA)$$

2. Olkoon Ω mielivaltainen joukko joka tulkitaan perustapahtumien joukoksi,

   $A = \{ \omega_1, \dots, \omega_n\} \subseteq \Omega$ äärellinen joukko,

   $W = (w_1, \dots, w_n) \subseteq \mathbb{R}^n_+$, jossa $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

   Määritellään $\forall B \subseteq \Omega$

$$P_W(B) := \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{1}_B(\omega_i)}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

   - Osoita että P_W toteuttaa De Finettin hinnoittelun todennäköisyyden aksioomat.
   - Karakterisoi P_W-varmat tapahtumat.
   - Olkoon $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mielivaltainen funktio.

     X tulkitaan sopimukseksi joka maksaa takaisin suuretta $X(\omega)$ kun ω tapahtuu.

     Laske sopimuksen X:n hinta (odotusarvo) $E_{P_w}(X)$ hinnoitelutodennäköisyydellä P_w.

3. (jatko) Olkoon $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mielivaltaisia funktioita. Osoita hinnoittelutodennäköisyyden vaihto kaava

$$E_{P_W}(ZX) = E_{P_W}(Z) E_{P_{WZ}}(X)$$

   jossa $W(\omega) = w_i$ kun $\omega = \omega_i \in A$, $W(\omega) = 0$ kun $\omega \notin A$

4. (jatko) Olkoon nyt $C \subseteq \Omega$, jolla $P_W(C) > 0$. Maritellään $\forall B \subseteq \Omega$

$$P_W(B|C) := P_{W\mathbf{1}_C}(B)$$

Osoita että

$$P_W(B|C) = \frac{P_W(B \cap C)}{P_W(C)}$$

ja kuvaus

$$B \mapsto P_W(B|C)$$

toteuttaa De Finettin aksioomat. $P_W(B|C)$ on tapahtuman B:n ehdollinen todennäköisyyys ehdolla C tapahtumaa, P_W todennäköisyyden suhteen. Se on hyvin määritelty pelkästään kun $P_W(C) > 0$.

5. (jatko) Oloon $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mielivaltainen funktio, laske sen hinta (odotusarvo) $E_{P_W}(X|C)$ ehdollisen todennäköisyyden $P_W(\cdot|C)$:n suhteen.

6. Olkoon Ω mielivaltainen joukko. Määritellään alijoukkojen $A, B \subseteq \Omega$, *symmetrinen erotus*

   $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{\omega : \omega \text{ is in } A \text{ or in } B \text{ but not in both}\}$

   Näytä että potenssi joukko 2^Ω on **rengas** operatioiden Δ (summa) ja $\cap$ (tulo) suhteen. Eli

   - Esitä identiteetti jäsen Δ:n operaation suhteen,
   - Esitä identiteetti $\cap$:n operaation suhteen,
   - osoita että jokaisella jäsenillä on additiivinen inverssi,
   - osoita että Δ on assosiatiivinen ja distributiivinen ominaisuus on voimassa.

   Vihje : indikaattorille pätee

$$\mathbf{1}_{(A\Delta B)} = \big(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B\big) \bmod 2$$