HY Todennäköisyysteoria, syksy 2012, laskuharjoitukset 9 (22.11.2012)

1. Olkoon

$$L^0(\Omega,\mathcal{F},P)=\Big\{X:(\Omega,\mathcal{F})\longrightarrow(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\text{ mitallinen }\Big\}\Big/\sim$$

jossa samaistetaan satunnaismuuttujat $X\sim Y$ silloin kun $P(\{\omega: X(\omega)=Y(\omega)\})=1$. Tämä on metrinen avaruus (mutta ei ole normiavaruus) metriikalla

$$d(X,Y)=d(X-Y,0)=E_P\left(\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right)$$

On osoitettu luennolla että $d(\cdot,\cdot)$ metriikka virittää stokastisen konvergenssiin topologia, eli

$$X_n\xrightarrow{P}X\iff d(X_n,X)\to 0$$

Seuraavissa tehtävissä osoitamme että $L^0(P)$ on **täydellinen** stokastisen konvergenssin suhteen.

Sanotaan että jono $(X_n(\omega))$ on **stokastisesti Cauchy** kun $\forall\delta,\varepsilon>0$ on olemassa N jolla kaikille $m,n\geq N$

$$P\big(\omega:|X_n(\omega)-X_m(\omega)|\geq\delta\big)<\varepsilon$$

(a) Osoita että kun $X_n\xrightarrow{P}X$, jono (X_n) on stokastisesti Cauchy.

(b) Oletamme nyt että jono (X_n) on stokastisesti Cauchy. Osoita että on olemassa indeksien alijono (n_k) jolla P-melkein varmasti $(X_{n_k}(\omega))$ on Cauchy jono .

(c) Osoita että jos jono (X_n) on stokastisesti Cauchy, on olemassa satunnaismuuttuja $X(\omega)$ jolla $X_n\xrightarrow{P}X$.
Vihje: Kokeile $X(\omega):=\limsup_k X_{n_k}(\omega)$, jossa (n_k) on edellisen tehtävän alijono.

2. Keksi fuktio $f(x)\in L^2(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)\setminus L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$ jossa $\lambda(dx)=dx$ on Lebesguen mitta, eli

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)^2dx<\infty\quad\text{ja}\quad\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=\infty$$

Miksi selläinen esimerkki ei ole ristiriidassa Jensenin epäyhtälön kanssa ?

3. (a) Osoita : kun $x \in \mathbb{R}$, kuvaus $x \mapsto f(x) = |x|^p$ on konveksi jos ja vain jos $p \geq 1$.

   (b) Osoita että jos $g : R^d \to \mathbb{R}$ on konveksi ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on konveksi ja ei-vähenevä, myös komposiitio $f(g(x))$ on konveksi.

   (c) Osoita että $x \mapsto |x|^p$ on konveksi jos ja vain jos $p \geq 1$ myös Eukliidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^d$ jossa $|x| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 \right)^{1/2}$.

4. Olkoon $(X_k(\omega))$ $k = 1, \ldots, n$ P-riippumattomia satunnaismuuttujia jolla $E_P(X_k) = 0$ and $E_P\big(|X_k|^3\big) < \infty$ $\forall k$.

   (a) Osoita:

$$E_P\left(\left\{ \sum_{k=1}^{n} X_i \right\}^3 \right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k^3)$$

   (b) Onko vastaava lause korkeimman asteen potenssille $p = 4$ tosi ? Eli kun $E(X_k) = 0$, $E(X_k^4) < \infty$, voisiko olla

$$E_P\left(\left\{ \sum_{k=1}^{n} X_k \right\}^4 \right) \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{n} E(X_k^4)$$